Exemple complet d'étude d'une suite récurrente

Énoncé

On étudie l'évolution d'une population animale soumis à un certain mode de prédation.

Celle-ci, comptée en milliers d'individus, est modélisée par la suite (u) définie par : $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n^2}{4+u_n^2}$.

Pour la suite, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5x^2}{4+x^2}$; de sorte que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. Comment interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$; c'est-à-dire que f est paire.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = x$
4. Résoudre dans $\mathbb{R}_+$ l'inéquation $f(x) - x > 0$. On montrera que $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow x \in I =]1\ ;\ 4[$.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}+$. En dresser le tableau de variations complet c'est-à-dire avec les limites ou valeurs remarquables aux bornes du domaine.
6. En déduire que l'intervalle I est stable par f ; c'est-à-dire que $\forall x \in I, f(x) \in I$.
7. On prend ici $u_0 = 1$. De quelle nature semble être la suite (u) ? Justifier. Reprendre la question pour $u_0 = 4$.
8. On prend $u_0 \in I =]1\ ;\ 4[$. La figure ci-dessous représente les premiers termes de la suite (u). Conjecturer le sens de variation de la suite ainsi que sa convergence éventuelle.
9. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 < u_n < u_{n+1} < 4$.
   En déduire que (u) converge et calculer sa limite.
10. Étudier de la même façon et rapidement les cas où $u_0 \in]0\ ;\ 1$ puis $u_0 \in]4\ ;\ +\infty[$ (On pourra s'aider du dessin).

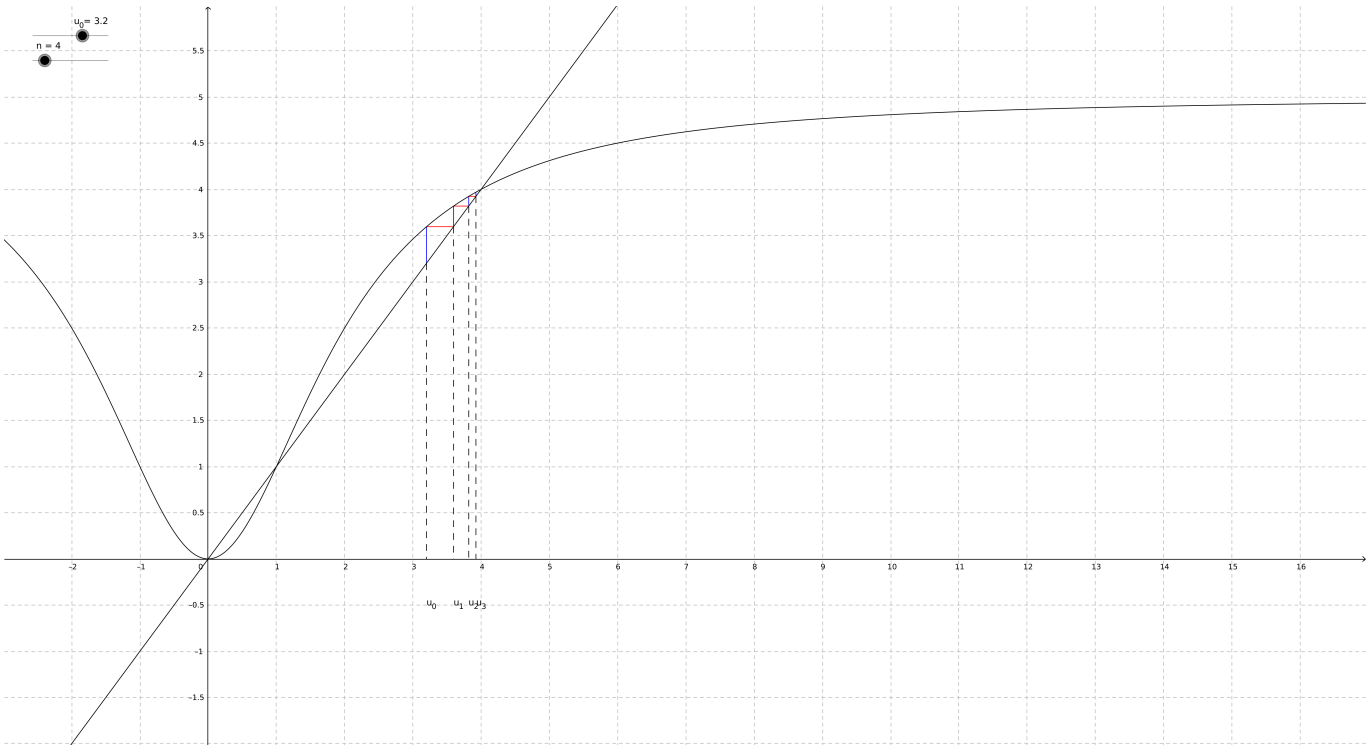


FIGURE 1 – Construction en « toile d'araignée » des termes de la suite (u)

Correction rapide

1. La démonstration se fait facilement par récurrence. On utilise le fait que $\forall xin\mathbb{R}^*, x^2 > 0$ et donc, $f(x) > 0$.
2. Les carrés de deux nombres opposés sont égaux, donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$.
3. $$\begin{aligned} f(x) = x \Leftrightarrow & 5x^2 = 4x + x^3 \\ \Leftrightarrow & x^3 - 5x^2 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow & x(x^2 - 5x - 4) = 0 \\ \Leftrightarrow & x(x-1)(x-4) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 1 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{aligned}$$

   Les points fixes sont 0, 3 et 4.
4. $f(x) - x = \dfrac{5x^2}{x^2+4} - x = \dfrac{5x^2 - x^3 - 4x}{x^2+4} = -\dfrac{x(x-1)(x-4)}{x^2+4}$.

   On forme un tableau de signes :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$-x$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

   On a bien : $f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]1\ ;\ 4[$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}$
   $$\begin{aligned} f'(x) = & 5\frac{2x(x^2+4) - x^2 \times 2x}{(x^2+4)^2} \\ = & 10x\frac{x^2+4-x^2}{(x^2+4)^2} \\ f'(x) = & \frac{40x}{(x^2+4)^2} \end{aligned}$$

   Ansi $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) >$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}+$.
   D'où le tableau de variations (Les limites sont à calculer) :

x	0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

6. Les variations de f calculées montrent que $\forall x \in I \Rightarrow f(x) \in I$.
7. $u_0 = 1$ est un point fixe, il est aisé de montrer *par récurrence* que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$; ainsi, (u) est constante égale à 1.

   La réponse est identique si $u_0 = 4$ qui est un autre point fixe de f.

8. (u) semble croissante et tendre vers 4.

9. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $1 < u_n < u_{n+1} < 4$ ».
   Initialisation :
   Comme $u_0 \in I$ et d'après la question 4, $u_1 = f(u_0) > u_0$. Et d'après la question 6, $u_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow u_1 = f(u_0) \in I$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Hérédité :
   Pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
   Comme I est stable par f et f est strictement croissante sur I, alors : $1 < u_n < u_{n+1} < 4 \Rightarrow 1 < f(u_n) < f(u_{n+1}) < 4$; c'est-à-dire $1 < u_{n+1} < u_{n+2} < 4$.
   C'est $\mathcal{P}(n+1)$.
   Conclusion ... comme d'habitude.
   La suite (u) est croissante et majorée, d'après le théorème de convergence monotone, (u) converge vers $l \in [1\ ;\ 4]$, un point fixe de f.
   l vaut donc 1 ou 4. Comme (u) est croissante, alors $l = 4$.

10. On peut examiner le dessin et on observe que si $u_0 \in]0\ ;\ 1[$, alors (u) est décroissante et convergente vers 0.
    Et si $u_0 \in]4\ ;\ +\infty[$, alors (u) est décroissante et convergente vers 4.
    Bien sûr, ces résultats doivent être validés par des calculs et raisonnements comme à la question 9.