Contrôle de Mathématiques en Tale Spécialité
Thème : la récurrence

On considère la suite (u) définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1$

1. On suppose ici que $u_0 = \dfrac{1}{2}$.
   (a) Calculer la valeur exacte de $u_1,\ u_2$. De quelle nature semble être la suite (u) ?
   (b) Montrer votre conjecture par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
2. Dans cette question, $u_0 = 1$.
   (a) Calculer les valeurs exactes de $u_1,\ u_2$.
   (b) (u) est-elle arithmétique ? Géométrique ? Justifier votre réponse.
   (c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{1}{2} \times 3^n + \dfrac{1}{2}$.
   (d) Quelle est la limite de la suite (u_n) ? Justifier votre réponse.
3. On revient au cas ou u_0 n'est pas donné. En reprenant les calculs de la question précédente, on montre que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 3^n \times (u_0 - \dfrac{1}{2}) + \dfrac{1}{2}$.
   (a) Calculer la valeur à attribuer à u_0 pour que $u_2 = 1$.
   (b) On choisit maintenant $u_0 \in \mathbb{Z}$ (entier relatif). Montrer qu'il n'existe aucune valeur de $u_0 \in \mathbb{Z}$ telle que $u_1 = 1$.

Correction du contrôle : la récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = 3u_n - 1$

1. Cas où $u_0 = \dfrac{1}{2}$

(a) Calcul de u_1 et u_2

$u_1 = 3u_0 - 1 = 3 \times \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$ $\qquad$ $u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \times \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$. La suite semble être constante égale à $\dfrac{1}{2}$.

(b) Preuve de la conjecture par récurrence

On note $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n = \dfrac{1}{2}$.

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ s'énonce : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ ce qui est vrai vu la valeur de u_0.

Hérédité : Supposons pour un certain $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = \dfrac{1}{2}$.

Alors, $u_{n+1} = 3 \times u_0 - 1 = 3 \times \dfrac{1}{2} - 1 = \dfrac{1}{2}$. La propriété est bien héréditaire.

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, alors, d'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Cas où $u_0 = 1$

(a) Calcul de u_1 et u_2

$u_1 = 3 \times 1 - 1 = 2$, $\qquad$ $u_2 = 3 \times 2 - 1 = 5$.

(b) Nature de la suite

- ☞ $u_1 - u_0 = -1$ et $u_2 - u_1 = 5 - 1 = 3$. Les écarts diffèrent, la suite n'est pas arithmétique.
- ☞ $\dfrac{u_1}{u_0} = 2$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{5}{2} = 6$. Les rapports diffèrent, la suite n'est pas géométrique.

(c) Expression de u_n

On note $\mathcal{P}_n$ la proposition : $u_n = 3^n \cdot \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ s'énonce $u_0 = 3^0 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}$.

Or, $u_0 = 1$ par hypothèse.

D'autre part, $3^0 \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$; ainsi, $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ soit vraie ; c'est-à-dire que $u_n = \dfrac{1}{2}(3^n + 1)$ (Hypothèse $\mathcal{H}_n$).

Alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = 3u_n - 1 \\ & = 3 \cdot \frac{1}{2}(3^n + 1) - 1 \quad \text{Par } \mathcal{H}_n \\ & = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 3) - 1 \qquad\qquad \text{Ainsi, } \mathcal{P}_n \text{ est héréditaire.} \\ & = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 3 - 2) \\ & u_{n+1} = \frac{1}{2}(3^{n+1} + 1) \end{cases}$$

Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, alors, d'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) Limite de la suite

Comme $3 > 1$, la suite $n \in \mathbb{N} \mapsto 3^n$ tend vers $+\infty$ (limite usuelle).

Par somme puis, produit, $u_n = \dfrac{1}{2}(3^n + 1) \longrightarrow +\infty$.

3. Cas général

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 3^n(u_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$.

(a) Déterminer u_0 pour que $u_2 = 1$

On impose :
$u_2 = 3^2(u_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 1$.

$9(u_0 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 1 \iff 9u_0 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 1 \iff 9u_0 - 4 = 1 \iff 9u_0 = 5 \iff u_0 = \dfrac{5}{9}$.

(b) Montrer qu'il n'existe aucun entier u_0 tel que $u_1 = 1$

En revenant à la définition de u_1, $u_1 = 3u_0 - 1$
On doit avoir : $3u_0 - 1 = 1$ ou encore $u_0 = \dfrac{2}{3}$
Comme $u_0 \in \mathbb{Z}$, l'égalité imposée est impossible.