

La récurrence en terminale

Table des matières

I Principe ou axiome de récurrence	1
II Pratique du raisonnement par récurrence	2
1) Axiome de récurrence : Mode d'emploi	2
2) Axiome de récurrence : Quelques exercices	2

I Principe ou axiome de récurrence

Exemple :

On considère la suite (u_n) définie pour par $u_0 = 2$, puis pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.

Question : u_n existe-t-il pour tout entier n ?

Ici, la suite est définie par récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x + 5}$. On ne dispose pas d'une expression explicite de u_n qui permettrait de répondre à la question. On sait seulement calculer les termes de la suite de proche en proche : $u_0, u_1, \dots$. Ce qui peut empêcher le calcul d'un terme u_{n+1} est que le précédent u_n soit tel que $u_n + 5 < 0$.

Pour traiter le problème d'une manière plus générale, on peut remarquer que, **si** que le terme u_n existe et est positif, **alors** le terme suivant u_{n+1} est bien défini aussi car alors, $u_n + 5 > 0$.

On dit que la propriété : P_n : « u_n existe et $u_n > 0$ » est héréditaire.

Un peu d'histoire :

La notion d'entier naturel nous est familière depuis notre enfance puisque c'est avec les nombres 0, 1, 2, 3 ... que l'apprentissage numérique débute en CP ou en grande section de maternelle. Jusqu'au XIXe siècle cette perception intuitive des entiers suffisait au mathématicien ; ces nombres servant à dénombrer des collections d'objets indivisibles. Avec l'invention de la théorie des ensembles, le mathématicien Richard Dedekind (1831-1916) et le mathématicien logicien Giuseppe Peano (1858-1932) ont établi une définition axiomatique et une construction rigoureuse de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

La définition axiomatique des entiers naturels de Peano est usuellement décrite informellement par cinq axiomes :

1. L'élément appelé zéro et noté 0, est un entier naturel.
2. Tout entier naturel n a un unique successeur, noté $s(n)$ (Ce sera $n + 1$).
3. Aucun entier naturel n n'a 0 pour successeur.
4. Deux entiers naturels ayant même successeur sont égaux.
5. Si un ensemble d'entiers naturels contient 0 et contient le successeur de chacun de ses éléments, alors cet ensemble est égal à $\mathbb{N}$.

Ce dernier axiome est connu sous le nom d'axiome ou principe de récurrence ; il permet de mener un raisonnement par récurrence ; celui-ci apparaît donc comme un axiome dans la construction de $\mathbb{N}$ et de manière un peu plus formelle, il s'énonce :

Soit A est une partie de $\mathbb{N}$:

Si $0 \in A$ et **Si** pour tout $n \in A$, alors $n + 1 \in A$, **alors** $A = \mathbb{N}$.

Attention ! Une propriété peut être héréditaire mais fausse. L'initialisation est indispensable.

Exemple à vérifier : pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n)$ « 2^n est un multiple de 3 ».

II Pratique du raisonnement par récurrence

1) Axiome de récurrence : Mode d'emploi

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend d'un entier naturel n . Pour démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$, on DOIT passer par les trois étapes suivantes :

1. **Initialisation** : vérifier que pour le premier entier n_0 , $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité de la propriété** : montrer que, si on suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain entier n (**hypothèse de récurrence**), alors $P(n+1)$ est encore vraie.
3. **Conclusion** : On conclut alors que, d'après le principe de récurrence, la propriété $P(n)$ est vraie pour **tout** entier $n \geq n_0$.

2) Axiome de récurrence : Quelques exercices

Exercice 1 Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}$.
Montrer que, pour tout entier n , $0 \leq u_n \leq 3$.

Exercice 2 Montrer que, pour tout $n \geq 10$, $2^n \geq 100n$.

Exercice 3 Soit la suite v définie par $v_0 = 2$, puis pour tout entier n , $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$.
Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{3}{2} \leq v_n \leq 2$.

Exercice 4 Somme des premiers entiers, de leurs carrés, de leurs cubes.

- a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- b) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 5 Soit n un entier naturel non nul, et S_n la somme $S_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p(p+1)}$.

1. Écrire un algorithme permettant de calculer S_n où n est un entier naturel choisi par l'utilisateur.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n}{n+1}$
3. a) Vérifier que $\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$
b) Retrouver alors le résultat du 1. par une autre méthode.

Exercice 6 Soit a un réel strictement positif.
Démontrer que pour tout entier naturel n , $(1+a)^n \geq 1+na$.

Exercice 7 On considère la suite (u) définie par : $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{1}{3n}(u_n^2 + 15n - 4)$.

1. Calculer u_2 , u_3 , u_4 et u_5 .
2. Quelle conjecture peut-on émettre sur la suite (u) ?
3. Démontrer votre conjecture par récurrence.

Exercice 8 Soit la suite u définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 1}$.
Démontrer que cette suite est monotone.