

Introduction à la logique en mathématique

2025

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Propositions	2
1.2	Un peu d'abstraction	3
1.3	Opérateurs Logiques	3
1.3.1	Opérateur « non »	3
1.3.2	Opérateur « et »	4
1.3.3	Opérateur « ou »	4
2	Construire de nouvelles formules	5
2.1	Combiner des opérateurs	5
2.2	Tables de vérité	6
2.3	Équivalence	8
2.4	Tautologie	8
2.5	Associativité, commutativité et distributivité	9
2.6	Double négation	9
2.7	Lois de Morgan	9
3	Implication	10
4	Équivalence	12
5	Quelques types de démonstrations	13
5.1	Modus Ponens	13
5.2	Contraposition	14
5.3	Démonstration par l'absurde	14
	Correction des exercices	16

Ce document est une petite introduction au formalisme logique en mathématiques.

La logique est la discipline – dont les bases ont été jetées par Aristote – permettant de comprendre ce qu’est un raisonnement, et en particulier de savoir si un raisonnement est juste ou faux. Elle est donc un prérequis essentiel à de nombreuses disciplines, telles que les mathématiques, l’informatique, la philosophie ou encore la rhétorique. Ce document constitue une petite introduction à la logique, en particulier sous l’angle mathématique – attention, il ne s’agit en aucun cas d’un exposé complètement rigoureux des fondements de la logique formelle... Il y a en particulier régulièrement des abus de langage et de notation, et beaucoup de notions ne sont pas définies rigoureusement pour ne pas trop compliquer le propos.

Donc si vous avez l’intention d’étudier formellement la logique propositionnelle, vous feriez mieux de trouver un autre poly !

1 Introduction

1.1 Propositions

À la base de la logique se trouve la notion de *proposition*. Il est assez délicat de définir mathématiquement ce qu’est une proposition, nous nous bornerons donc à la définition intuitive suivante :

Définition (Proposition)

Une **proposition** est une phrase, une formule mathématique, etc., etc... à laquelle on peut attribuer une **valeur de vérité**, c’est-à-dire qui est soit vrai soit fausse.

Voici quelques exemples de propositions :

- « $2 + 2 = 4$ »
- « si $x > 4$ alors $x > 2$ »
- « *Paris est en France* »
- « $2 - 0 = 4$ »
- « si $x > 2$ et $y > 4$ alors $x + y < 0$ »
- « *Bordeaux est la capitale d’Espagne* »

les 3 premières sont vraies, alors que les 3 dernières sont fausses.

Par contre, les phrases suivantes ne sont pas des propositions :

- « *salut !* » : ce n’est ni vrai ni faux, cela n’a même pas de sens de parler de « vérité » dans ce cas là.
- « $x > 2$ » : ce n’est ni vrai ni faux, cela dépend de la valeur de x .
- « *Il fait chaud* » : sorti de tout contexte, ce n’est ni vrai ni faux non plus.

Les propositions sont les objets de base sur lesquels nous allons pouvoir effectuer des raisonnements. Comme nous allons le voir, l’intérêt de la logique est de proposer des manières générales de raisonner, qui dépendent seulement de la valeur de vérité d’une proposition (c’est-à-dire si elle est vraie ou fausse), et non pas de la proposition elle-même.

1.2 Un peu d'abstraction

En logique, nous allons raisonner non pas sur des propositions précises comme celles du paragraphe précédent, mais sur des propositions que nous appellerons p , q ou r par exemple. L'intérêt de procéder à cette *abstraction* est le suivant : nous allons faire raisonnement et trouver des règles générales sur des propositions p , q , etc... suivant qu'elles soient vraies ou fausses, puis, si nous voulons voir ce que cela donne sur des propositions réelles, il suffira de remplacer p , q , etc... par ces propositions. Pour cette raison, p , q , ... s'appellent des **variables** ou **variables propositionnelles**.

1.3 Opérateurs Logiques

Nous allons définir quelques opérateurs très utile, permettant de combiner des propositions pour fabriquer des **formules propositionnelles**.

1.3.1 Opérateur « non »

À partir d'une proposition p , nous pouvons construire une formule propositionnelle, appelée

$$\neg p$$

lire « non p ». La valeur de vérité de $\neg p$ est définie de la façon suivante :

- si p est vraie, $\neg p$ est fausse.
- si p est fausse, $\neg p$ est vraie.

Ceci est résumé dans le tableau suivant :

p	$\neg p$
V	F
F	V

FIGURE 1 – Table de vérité de l'opérateur « non »

Voici quelques exemples en remplaçant la variable p par une proposition :

- avec $p = \ll 2 + 2 = 4 \gg$:
 $\ll \neg(2 + 2 = 4) \gg$ est fausse, car $\ll 2 + 2 = 4 \gg$ est vraie. Cette proposition peut-également s'écrire $2 + 2 \neq 4$.
- avec $p = \ll 2 - 0 = 4 \gg$:
 $\ll \neg(2 - 0 = 4) \gg$ (ou encore $\ll 2 - 0 \neq 4 \gg$) est vraie, car $\ll 2 + 0 = 4 \gg$ est fausse.
- avec $p = \ll \text{Paris est la capitale de France} \gg$:
 $\ll \neg(\text{Paris est la capitale de France}) \gg$ (soit $\ll \text{Paris n'est la capitale de France} \gg$) car fausse car p est vraie.

Exercice 1 Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\ll \neg(2 \leq 2) \gg$

- $\ll \neg(2 = 4) \gg$
- $\ll \neg(Nice \text{ est en Allemagne}) \gg$

correction

1.3.2 Opérateur « et »

À partir de 2 propositions p et q , nous allons une formule appelée *conjonction* de p et q , et noté de la façon suivante :

$$p \wedge q$$

que l'on prononce « p et q » .

Ce « et » logique correspond au « et » que nous utilisons couramment en français. $p \wedge q$ est vraie si p est vraie et q est vraie en même temps, et fausse dans tous les autres cas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

FIGURE 2 – Table de vérité de l'opérateur « et »

Quelques exemples :

- $\ll (2 + 3 = 5) \wedge (0 = 0) \gg$. Cette proposition est vraie car « $2 + 3 = 5$ » et « $0 = 0$ » sont vraies (1^{ère} ligne du tableau).
- $\ll (2 + 3 = 5) \wedge (Nice \text{ est en Écosse}) \gg$ est fausse car « $2 + 3 = 5$ » est vraie et « *Nice est en Écosse* » est fausse (2^{ème} ligne du tableau).
- $\ll (2 + 2 = 5) \wedge (\text{La } 1283947^{\text{ème}} \text{ décimale de } \pi \text{ est } 3) \gg$ est fausse. En effet, je n'ai aucune idée de ce que vaut la 1283947^{ème} décimale de π , mais par contre je sais que $2 + 2 \neq 5$. Si la 1283947^{ème} décimale de π vaut 3, on est dans 3^{ème} ligne du tableau, et sinon, on est dans la 4^{ème} ligne du tableau. Dans tous les cas, notre proposition est fausse.

Exercice 2

Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $\ll (2 \leq 2) \wedge (3 > 4) \gg$
- $\ll (2 = 4) \wedge (3 = 3) \gg$
- $\ll (2 < 8) \wedge (Nice \text{ est en France}) \gg$

correction

1.3.3 Opérateur « ou »

Toujours à partir de 2 propositions p et q , nous allons cette fois-ci construire la *disjonction* de p et q noté de la façon suivante :

$$p \vee q$$

que l'on prononce « p ou q » .

Contrairement au cas du « et », le « ou » logique ne correspond pas au « ou » que nous utilisons couramment en français : dans le langage courant, le « ou » à souvent un caractère *exclusif*, c'est à dire que les 2 possibilités s'excluent mutuellement : si je dis « je vais à la plage ou à la montagne », c'est l'un ou l'autre, mais pas les 2 en même temps. En revanche, en mathématique, le « ou » est inclusif : $p \vee q$ est vraie si p est vraie, q est vraie ou si les deux sont vraies, et donc fausse seulement si p et q sont fausses.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

FIGURE 3 – Table de vérité de l'opérateur « ou »

Quelques exemples :

- « $(2 + 3 = 5) \vee (0 = 0)$ » . Cette proposition est vraie car « $2 + 3 = 5$ » et « $0 = 0$ » sont vraies (1^{ère} ligne du tableau).
- « $(2 + 2 = 5) \vee (\text{Nice est en Écosse})$ » est fausse car « $2 + 3 = 5$ » est fausse et « *Nice est en Écosse* » est fausse (4^{ème} ligne du tableau).
- « $(2 + 2 = 4) \vee (\text{La } 1283947^{\text{ème}} \text{ décimale de } \pi \text{ est } 3)$ » est vraie. En effet, je n'ai toujours aucune idée de ce que vaut la 1283947^{ème} décimale de π , mais par contre je sais que $2 + 2 = 4$. Si la 1283947^{ème} décimale de π vaut 3, on est dans 1^{ème} ligne du tableau, et sinon, on est dans la 2^{ème} ligne du tableau. Dans tous les cas, notre proposition est vraie.

Exercice 3

Déterminez la valeur de vérité des propositions suivantes :

- « $(2 \leq 2) \vee (3 > 4)$ »
- « $(2 = 4) \vee (3 = 3)$ »
- « $(8 < 2) \vee (\text{Nice est en Belgique})$ »

correction

2 Construire de nouvelles formules

2.1 Combiner des opérateurs

Pour l'instant nous avons vu comment construire des formules à partir de propositions, et des opérateurs $\neg$, $\wedge$ et $\vee$. Nous pouvons également utiliser ces opérateurs pour construire des formules plus complexes en utilisant les règles suivantes :

1. Toute proposition (ou une variable propositionnelle) est une formule.
2. si F est une formule, $\neg F$ est une formule.
3. si F_1 et F_2 sont des formules, $F_1 \wedge F_2$ est une formule.
4. si F_1 ou F_2 sont des formules, $F_1 \vee F_2$ est une formule.

On peut voir cela comme des règles de constructions de formules. Les règles 2, 3 et 4 expliquent comment construire de nouvelles formules à partir de formules que l'on a déjà, et la règle 1 nous fournit le matériaux de base à partir duquel construire les formules : les variables propositionnelles.

En combinant tout ceci, nous pouvons construire de nouvelles formules. Par exemple, si p , q et r sont des propositions,

$$S = (p \wedge q) \vee \neg r$$

est une formule (les parenthèses sont parfois nécessaires pour éviter les ambiguïtés, par exemple entre $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee r$).

En effet, p et q sont des formules (règle 1), donc $(p \wedge q)$ est une formule (règle 3). r est une formule (règle 1), donc $\neg r$ est une formule (règle 2). Par conséquent, S qui est la disjonction des 2 est une formule (règle 4).

Nous pouvons également déterminer les valeurs de vérités de ces formules plus complexes si nous connaissons celles des propositions de départ. Soit par exemple la formule suivante :

$$((2 < 3) \wedge \neg(3 < 4)) \vee (5 < 2)$$

$(3 < 4)$ est vraie, donc $\neg(3 < 4)$ est fausse. Donc $((2 < 3) \wedge \neg(3 < 4))$ est fausse. De plus, $(5 < 2)$ est également fausse. Donc notre formule $((2 < 3) \wedge \neg(3 < 4)) \vee (5 < 2)$ est fausse.

Exercice 4 Voici quelques formules. Déterminez leur valeur de vérité.

- $\ll ((1 < 2) \wedge \neg(4 < 3)) \vee (5 < 2) \gg$
- $\ll (\neg(2 < 1) \wedge (6 < 3)) \vee ((\text{Paris est en France}) \vee (\pi \text{ est un nombre entier})) \gg$
- $\ll (\text{Paris est en France}) \wedge \neg (\text{Paris est en France}) \gg$
- $\ll (\text{Paris est en France}) \vee \neg (\text{Paris est en France}) \gg$

correction

2.2 Tables de vérité

Nous avons déjà vu des tables de vérité, sans préciser exactement de quoi il s'agissait. En fait, une table de vérité est simplement un tableau qui, pour chaque valeur de vérité possible (vrai ou faux) des variables apparaissant dans la formule, indique quelle est la valeur de vérité de la formule.

Voici par exemple la table de vérité de la formule S présentée ci-dessus :

Comment avons-nous construit cette table ? Nous avons commencé par écrire les tables de vérité de $S_1 = (p \wedge q)$ et $S_2 = \neg r$:

Nous avons ensuite $S = S_1 \vee S_2$. Pour construire la colonne correspondant à S , nous regardons donc les colonnes correspondant à S_1 et S_2 , et nous effectuons un « ou » logique sur ces 2 colonnes : nous écrivons vrai dès que l'une des deux au moins est vraie :

Combien de lignes contient une table de vérité ? Cela dépend du nombre de variables différentes présentes dans la formule.

p	q	r	$S = (p \wedge q) \vee \neg r$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	V	F	V
F	F	V	F
F	F	F	V

FIGURE 4 – Table de vérité de S

p	q	r	$S_1 = (p \wedge q)$	$S_2 = \neg r$
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	F
F	F	F	F	V

FIGURE 5 – Construction de la table de vérité de S

p	q	r	$S_1 = (p \wedge q)$	$S_2 = \neg r$	$S = S_1 \vee S_2$
V	V	V	V	F	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	V	F	F	F
F	F	F	F	V	V

FIGURE 6 – Construction de la table de vérité de S

- S'il n'y a qu'une variable, il n'y a que 2 cas à considérer : sa valeur de vérité est vraie ou fausse. Il y aura donc 2 lignes dans la table.
- S'il y a 2 variables différentes p et q , il y a 4 cas à considérer : $(p$ vraie, q vraie), $(p$ vraie, q fausse), $(p$ fausse, q vraie) et $(p$ fausse, q fausse).
- De façon générale, s'il y a n variables différentes, il y aura 2^n ligne dans la table de vérité.

Exercice 5 Écrire la table de vérité des formules suivantes :

- $p \wedge \neg p$

- $(q \vee \neg q)$
- $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

correction

2.3 Équivalence

Définition (Équivalence)

Deux formules sont *équivalentes* si elles ont la même table de vérité.

Considérons les 2 formules suivantes :

- $S_1 = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
- $S_2 = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

Elles ont toutes deux la même table de vérité :

p	q	S_1 ou S_2
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

et elles sont donc équivalentes. Elles correspondent toutes deux au « ou » du langage courant, appelé *ou exclusif*, et souvent noté **XOR** ou $\oplus$.

Un second exemple :

- $S_1 = p$
- $S_2 = \neg(\neg p)$

p	$\neg p$	S_1	S_2
V	F	V	V
F	V	F	F

Une formule est donc équivalente à la négation de sa négation.

2.4 Tautologie

Définition (Tautologie)

On appelle *tautologie* une formule équivalente à **V**, c'est-à-dire dont toutes les entrées dans la table de vérité sont vraies.

Exercice 6

Par exemple, vérifiez que les formules suivantes sont des tautologies :

- $p \vee \neg p$ (cette tautologie est appelée *tiers-exclu* : elle dit essentiellement que soit une formule est vraie, soit sa négation est vraie).
- $\neg(p \wedge \neg p)$
- $(p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$

2.5 Associativité, commutativité et distributivité

Voici quelques résultats importants concernant les opérateurs **et** et **ou**.

Théorème (Associativité)

- $(p \vee q) \vee r$ et $q \vee (p \vee r)$ sont équivalentes.
- $(p \wedge q) \wedge r$ et $q \wedge (p \wedge r)$ sont équivalentes.

En conséquence, on pourra écrire $p \vee q \vee r$ ou $p \wedge q \wedge r$, sans se soucier de l'emplacement des parenthèses.

Théorème (Commutativité)

- $p \vee q$ et $q \vee p$ sont équivalentes.
- $p \wedge q$ et $q \wedge p$ sont équivalentes.

Théorème (Distributivité)

- $r \vee (p \wedge q)$ et $((r \vee p) \wedge (r \vee q))$ sont équivalentes.
- $r \wedge (p \vee q)$ et $((r \wedge p) \vee (r \wedge q))$ sont équivalentes.

Exercice 7 Vérifiez ces théorèmes.

2.6 Double négation

Comme nous l'avons vu ci-dessus,

Théorème

p et $\neg(\neg p)$ sont équivalentes.

2.7 Lois de Morgan

Un autre théorème concernant la négation.

Théorème (Lois de Morgan)

- $\neg(p \wedge q)$ et $(\neg p \vee \neg q)$ sont équivalentes.
- $\neg(p \vee q)$ et $(\neg p \wedge \neg q)$ sont équivalentes.

Exercice 8 Vérifiez ce théorème.

Par exemple, la négation de la propriété

$$4 > 3 \wedge 4 < 5$$

est

$$\neg(4 > 3) \vee \neg(4 < 5)$$

soit encore

$$4 \leq 3 \vee 4 \geq 5$$

et non pas

$$4 \leq 3 \wedge 4 \geq 5$$

Exercice 9

En utilisant les lois de Morgan, écrivez (en français) les négations des formules suivantes :

- « la 39^{ème} décimale de π est 3 ou 5. »
- « 35! est divisible par 3 ou par 4. »

correction

Exercice 10

Reprenons les deux tautologies suivantes, déjà étudiées dans un exercice précédent.

- $\neg(p \wedge \neg p)$
- $(p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$

Prouvez que ce sont des tautologies en utilisant les théorèmes ci-dessus et le tiers-exclu.

correction

3 Implication

À partir de 2 formules P et Q , nous pouvons construire une formule noté de la façon suivante :

$$P \Rightarrow Q$$

(lire « P implique Q »)

et définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P est appelée **prémisses** ou **hypothèses**, et Q **conclusion**.

Les théorèmes mathématiques utilisent très souvent des implications, sous la forme **si ... alors**.

Remarquez qu'un théorème dit seulement que la conclusion doit être vraie si la prémisse l'est.

En revanche, si la prémisse est fausse, la conclusion peut-être indifféremment vraie ou fausse.

Du point de vue de la déduction mathématique, cela signifie qu'à partir d'une formule fausse on peut démontrer n'importe quoi.

Voici un théorème :

« si $n - 1$ est divisible par 3, alors n n'est pas divisible par 3. »

Prouvons rapidement ce théorème.

Démonstration :

Nous avons juste à nous occuper du cas où la prémisse est vraie, et montrer alors que la conclusion est également vraie.

Supposons que $n - 1$ est divisible par 3

On peut donc écrire $n - 1 = 3k$ avec k entier.

On a donc $n = 3k + 1$ et n n'est pas divisible par 3.

□

En revanche, si la prémisse $n - 1 = 3k$ n'est pas vérifiée, ce théorème ne dit rien sur la valeur de vérité de « n n'est pas divisible par 3 » :

- si $n = 3$, elle est vraie
- si $n = 4$, elle est fausse

Exercice 11

Démontrer que « n pair $\Rightarrow n^2$ pair »¹.

correction

Exercice 12

Prouver que les formules suivantes sont des tautologies :

- $p \Rightarrow p$
- $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

correction

On a la propriété suivante, très importante :

Théorème $p \Rightarrow q$ est équivalente à $\neg p \vee q$.

Exercice 13

Démontrez cette propriété.

1. On appelle entier pair un entier qui peut s'écrire sous la forme $2k$ avec k entier. Un entier impair est un entier qui peut s'écrire sous la forme $2k + 1$ avec k entier

4 Équivalence

À partir de 2 formules P et Q , nous pouvons construire une formule noté de la façon suivante :

$$P \Leftrightarrow Q$$

(lire « P équivaut à Q »)

et définie par la table de vérité suivante :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

$P \Leftrightarrow Q$ sera donc vraie si et seulement si P et Q ont la même valeur de vérité.

Cette construction s'appelle « équivalence ». Attention, ce mot n'a pas le même sens que lorsque nous parlons de formules équivalentes.

Cependant, on relie les deux notions :

Théorème

P et Q sont équivalentes si et seulement si $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie.

Démonstration :

en effet, si P et Q sont équivalentes, leurs tables de vérité sont les mêmes. Par exemple, si P et Q dépendent de variables p_i , on a avoir une table de vérité qui ressemble à ceci :

p_1	p_2	...	p_n	P	Q
V	F	...	F	V	V
F	V	...	F	F	F
F	F	...	F	V	V

les colonnes correspondant à P et Q ayant les mêmes valeurs. On aura donc la table de vérité suivante pour $P \Leftrightarrow Q$.

p_1	p_2	...	p_n	P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	F	...	F	V	V	V
F	V	...	F	F	F	V
F	F	...	F	V	V	V

et $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie.

De la même façon, si $P \Leftrightarrow Q$ est une tautologie, il n'y a que des valeurs **V** dans la dernière colonne de sa table de vérité, et les valeurs sont donc identiques dans les colonnes correspondant à P et Q .

□

En mathématiques, lorsque l'on souhaitera démontrer une formule, on pourra démontrer une formule équivalente.

On a également le théorème suivant :

Théorème $P \Leftrightarrow Q$ et $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ sont équivalentes

qui affirme essentiellement que pour montrer que P et Q sont équivalentes, il suffit de montrer que P implique Q et que Q implique P .

En mathématiques, beaucoup de théorèmes sont sous la forme **...si et seulement si ...** (que l'on note en général **...Ssi ...**). Pour démontrer de tels théorèmes, on procédera aux démonstrations des implications dans les 2 sens.

Voici un exemple :

« n est pair Ssi $n + 2$ est pair. »

Démonstration :

pour le démontrer, nous procédons en 2 étapes :

- « n est pair $\Rightarrow n + 2$ est pair. »
Supposons n pair. On peut écrire $n = 2k$ pour un certain entier k . On a alors $n + 2 = 2k + 2 = 2(k + 1)$ avec $k + 1$ entier, et donc $n + 2$ est pair.
- « $n + 2$ est pair $\Rightarrow n$ est pair. »
Supposons $n + 2$ pair. On peut écrire $n + 2 = 2k$ pour un certain entier k . On a alors $n = 2k - 2 = 2(k - 1)$ avec $k - 1$ entier, et donc n est pair.

□

Exercice 14

Montrer que « n est pair Ssi $n + 1$ est impair. »

Exercice 15

Montrer que l'implication n'est pas associative.

correction

5 Quelques types de démonstrations

Certaines tautologies sont extrêmement utilisées en mathématiques.

5.1 Modus Ponens

La plus courante, que nous avons déjà vue est appelée *modus ponens* :

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$$

elle correspond à la déduction naturelle. Elle affirme simplement que si nous avons un théorème $p \Rightarrow q$ et si ses hypothèses p sont vérifiées, alors ses conclusions q sont vérifiées.

En voici l'exemple tarte-à-la-crème :

théorème : tout homme est mortel (ou $homme \Rightarrow mortel$)
 prémisse : (or) Socrate est un homme
 conclusion : (donc) Socrate est mortel
 et un exemple plus mathématique :
 théorème : n pair $\Rightarrow n^2$ pair
 prémisse : (or) 16742 est pair
 conclusion : (donc) 16742^2 est pair

Exercice 16 Démontrer que la formule ci-dessus est bien une tautologie.

5.2 Contraposition

Encore appelée *Modus tollens*, il s'agit de la tautologie suivante.

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

Si un théorème permet de déduire une conclusion à partir d'hypothèses, il permet également de déduire que les hypothèses sont fausses si la conclusion n'est pas vérifiée.

Voici un exemple simple. Considérons le théorème « si k est pair, k^2 alors est pair ».

Par contraposition, on en déduit immédiatement le théorème suivant : « si k^2 est impair, alors k est impair ».

Il sera parfois plus pratique de démontrer la contraposé d'un théorème plutôt que le *sens direct*.

Exercice 17 Démontrer que la formule ci-dessus est bien une tautologie.

5.3 Démonstration par l'absurde

Considérons la tautologie suivante

$$(\neg p \Rightarrow \mathbf{F}) \Rightarrow (p)$$

où $\mathbf{F}$ est une formule toujours fausse (une *antilogie*).

Cette formule dit simplement que pour montrer p , il suffit de montrer que $\neg p \Rightarrow \mathbf{F}$, c'est-à-dire que $\neg p$ permet d'aboutir à une contradiction.

Ce type de raisonnement est très souvent utile pour démontrer qu'il n'existe pas d'objet vérifiant certaines propriétés : on va supposer qu'il en existe un, et aboutir à une contradiction.

Un premier exemple. Montrons que « il n'y a pas de plus grand nombre entier ».

Supposons, par l'absurde, qu'il y ait un plus grand nombre entier, et appelons le n . Alors, $n + 1$ est un nombre entier, et $n + 1$ est plus grand que n , ce qui est absurde de par notre choix de n . Ceci montre donc notre formule.

Voici un exemple classique un peu plus compliqué. Nous voulons montrer que $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ pour tout entiers p et q .

Nous allons supposer la négation de cette formule, soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ pour 2 entiers p et q .

Si p et q sont pairs, nous pouvons les diviser tous les 2 par deux. En recommençant un nombre suffisant de fois, nous pouvons écrire $p = 2^i p_1$ et $q = 2^i q_1$, avec p_1 impair ou q_1 impair. On a $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1}$ et donc

$$p_1 = \sqrt{2} q_1$$

soit en passant au carré

$$p_1^2 = 2q_1^2$$

donc p_1^2 est pair. On en déduit que p_1 est pair (cf. paragraphe sur la contraposée), et donc $p_1 = 2p'$ pour un certain p' . D'où $p_1^2 = 4p'^2$.

On en déduit que $q_1^2 = 2p'^2$ et q_1^2 est pair puis q_1 est pair.

p_1 et q_1 sont donc pairs, ce qui est en contradiction avec notre choix de p_1 et q_1 .

Nous avons démontré que $\sqrt{2}$ ne s'écrit pas comme division de 2 entiers, c'est-à-dire n'est pas *rationnel*.

Exercice 18 Démontrer que la formule ci-dessus est bien une tautologie.

Voici une autre variante de la démonstration par l'absurde.

$$((p \wedge \neg q) \Rightarrow \mathbf{F}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

sous un aspect un peu barbare, cette formule dit la chose suivante : si nous voulons montrer que p implique q , il suffit de supposer que p est vraie (les hypothèses sont vraies) et que q est fausses (les conclusions) sont fausses, et d'aboutir à une contradiction ($\mathbf{F}$)

Exercice 19 Démontrer que la formule ci-dessus est bien une tautologie.

Correction des exercices

—— Solution de l'exercice 1 [retour](#) ——

$\ll \neg(2 \leq 2) \gg \rightarrow$ **Faux**

$\ll \neg(2 = 4) \gg \rightarrow$ **Vrai**

$\ll \neg(\text{Nice est en Allemagne}) \gg \rightarrow$ **Vrai**

—— Solution de l'exercice 2 [retour](#) ——

- $\ll (2 \leq 2) \wedge (3 > 4) \gg \rightarrow$ **Faux**
- $\ll (2 = 4) \wedge (3 = 3) \gg \rightarrow$ **Faux**
- $\ll (2 < 8) \wedge (\text{Nice est en France}) \gg \rightarrow$ **Vrai**

—— Solution de l'exercice 3 [retour](#) ——

- $\ll (2 \leq 2) \vee (3 > 4) \gg \rightarrow$ **Vrai**
- $\ll (2 = 4) \vee (3 = 3) \gg \rightarrow$ **Vrai**
- $\ll (8 < 2) \vee (\text{Nice est en Belgique}) \gg \rightarrow$ **Faux**

—— Solution de l'exercice 4 [retour](#) ——

$\ll ((1 < 2) \wedge \neg(4 < 3)) \vee (5 < 2) \gg \rightarrow$ **Vrai**

$\ll (\neg(2 < 1) \wedge (6 < 3)) \vee ((\text{Paris est en France}) \vee (\pi \text{ est un nombre entier})) \gg \rightarrow$ **Vrai**

$\ll (\text{Paris est en France}) \wedge \neg(\text{Paris est en France}) \gg \rightarrow$ **Faux**

$\ll (\text{Paris est en France}) \vee \neg(\text{Paris est en France}) \gg \rightarrow$ **Vrai**

—— Solution de l'exercice 5 [retour](#) ——

$p \wedge \neg p$

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

$(p \vee \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \vee \neg q$
V	V	F	V
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V

$S = (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	S
V	V	V	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F

—— Solution de l'exercice 6 [retour](#) ——

Il suffit d'écrire leurs tables de vérité!

Pour la seconde par exemple :

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$	$\neg(p \wedge \neg p)$
V	F	F	V
F	V	F	V

—— Solution de l'exercice 9 [retour](#) ——

- « la 39^{ème} décimale de π n'est pas 3 et n'est pas 5. »
- « 35! n'est pas divisible par 3 et n'est pas divisible par 4. »

—— Solution de l'exercice 10 [retour](#) ——

En appliquant la loi de Morgan, on voit que $\neg(p \wedge \neg p)$ est équivalente à $\neg p \vee \neg \neg p$, qui par double-négation est équivalente à $\neg p \vee p$. Cette dernière formule est le tiers-exclu, qui est une tautologie.

$(p \vee q) \vee (\neg p \vee r)$ est équivalente à $p \vee q \vee \neg p \vee r$ par associativité. Par commutativité, elle est équivalente à $p \vee \neg p \vee q \vee r$ puis à $(p \vee \neg p) \vee (q \vee r)$ par associativité. $p \vee \neg p$ est une tautologie. Notre formule est donc équivalente à **V** $\vee \dots$ et est donc une tautologie.

—— Solution de l'exercice 11 [retour](#) ——

On suppose que n est pair. On peut donc écrire $n = 2k$.

En élevant les deux membres de l'égalité au carré, on obtient donc $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$ avec $(2k^2)$ entier. Donc n^2 est pair.

—— Solution de l'exercice 12 [retour](#) ——

Il suffit d'écrire les tables de vérité :

		<table> <tr> <th>p</th> <th>$p \Rightarrow p$</th> </tr> <tr> <td>V</td> <td>V</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>V</td> </tr> </table>		p	$p \Rightarrow p$	V	V	F	V																				
p	$p \Rightarrow p$																												
V	V																												
F	V																												
•																													
		<table> <tr> <th>p</th> <th>q</th> <th>$p \Rightarrow q$</th> <th>$p \wedge (p \Rightarrow q)$</th> <th>$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$</th> </tr> <tr> <td>V</td> <td>V</td> <td>V</td> <td>V</td> <td>V</td> </tr> <tr> <td>V</td> <td>F</td> <td>F</td> <td>F</td> <td>V</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>V</td> <td>V</td> <td>F</td> <td>V</td> </tr> <tr> <td>F</td> <td>F</td> <td>V</td> <td>F</td> <td>V</td> </tr> </table>			p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	V
p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$																									
V	V	V	V	V																									
V	F	F	F	V																									
F	V	V	F	V																									
F	F	V	F	V																									
•																													

—— Solution de l'exercice 15 [retour](#) ——

Considérons $S_1 = (p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ et $S_2 = p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$. On pourrait écrire leurs tables de vérités, et constater qu'elles sont différentes, mais on peut aussi utiliser des formules équivalentes. S_1 est équivalente à $(p \wedge \neg q) \vee r$ alors que S_2 est équivalente à $\neg p \vee \neg q \vee r$. On voit alors que si p et r sont fausses et q est vraie, S_1 est fausse, alors que S_2 est vraie.