

Initiation à la logique en Tale

1 Pour commencer, un peu de vocabulaire

1. Expression : Ensemble de signes (lettres, chiffres, symboles, mots, etc...) possédant une signification dans un contexte donné.
2. Prédicat : Relation entre plusieurs variables, par exemple l'inégalité $x < y$ est un prédicat reliant deux variables.
3. Proposition ou assertion ou affirmation : Propose l'expression d'un fait qui peut être vrai ou faux. Une proposition logique est synonyme d'énoncé.
4. Principe de non contradiction : Une proposition ne peut être à la fois vraie et fausse.
5. Principe du tiers exclus (dualité) : Une proposition est soit vraie, soit fausse.
6. Axiome : Proposition supposée vraie et que l'on ne cherche pas à démontrer.
7. Théorème : Proposition dont il faut établir la véracité. Un théorème est donc vrai s'il se déduit logiquement d'axiomes ou de propositions déjà établies.
8. Corollaire : Bonus qu'offre un théorème. C'est une conséquence directe d'un théorème.
9. Lemme : Théorème préparatoire à l'établissement d'un théorème de plus grande importance.
10. Conjecture : Proposition que l'on suppose vraie sans l'avoir démontrée. C'est une hypothèse plausible au vu de quelques exemples.

2 Connecteurs de base et leur table de vérité

Une table de vérité est un tableau définissant la valeur d'une fonction logique pour chacune des combinaisons possibles des entrées. Par convention et pour faciliter la lecture de grandes tables, on écrit F pour la valeur faux et V pour la valeur vrai.

On définit les symboles des connecteurs logiques : « *NON* », « *ET* » et « *OU* » et on note :

$NON\ p : \neg p$

$p\ ET\ q : p \wedge q$

$p\ OU\ q : p \vee q$

Ci-dessous, leur table de vérité :

p	$\neg p$
V	F
F	V

FIGURE 1 – Table de vérité de l'opérateur « *NON* »

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

FIGURE 2 – Table de vérité de l'opérateur « *ET* »

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

FIGURE 3 – Table de vérité de l'opérateur « *OU* »

3 Équivalent

Deux formules sont équivalentes si elles ont même table de vérité.

Des équivalences à connaître :

• p et $\neg(\neg p)$

• $\neg(p \wedge q)$ et $\neg p \vee \neg q$

• $\neg(p \vee q)$ et $\neg p \wedge \neg q$

Remarque : Les deux dernières tautologies constituent les lois de Morgan.

Exemple : En utilisant les lois de Morgan, écrivez (en français) les négations des formules suivantes :

— « la 39^{ème} décimale de π est 3 ou 5 ».

— « 35! est divisible par 3 et par 4 ».

4 Tautologie

On appelle tautologie une formule équivalente à **V**, c'est-à-dire dont toutes les entrées dans la table de vérité sont vraies. Par exemple, on vérifie que les formules suivantes sont des tautologies :

- $p \vee \neg p$ (cette tautologie est appelée tiers-exclu : elle dit essentiellement que soit une formule est vraie, soit sa négation est vraie).
- $\neg(p \wedge \neg p)$
- $(p \vee q) \vee (\neg p \vee q)$

5 Implication

- À partir de 2 formules p et q , nous pouvons construire une formule notée de la façon suivante : $p \Rightarrow q$ (lire « p implique q ») et définie par la table de vérité suivante :

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

- Une implication consiste à mettre en œuvre le raisonnement : « Si ... Alors ... ».

6 Équivalence

- À partir de 2 formules p et q , nous pouvons construire une formule appelée « équivalence » et notée de la façon suivante : $p \Leftrightarrow q$ (lire « p équivaut à q ») et définie par la table de vérité suivante :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- $p \Leftrightarrow q$ sera donc vraie si et seulement si p et q ont la même valeur de vérité.
- p et q sont équivalentes si et seulement si $p \Leftrightarrow q$ est une tautologie.
- $p \Leftrightarrow q$ est équivalent à $(p \Rightarrow q)$ et $(q \Rightarrow p)$.

7 Quelques types de démonstrations

Certaines tautologies sont extrêmement utilisées en mathématiques.

7.1 Modus Ponens

La plus courante, appelée *modus ponens* ou implication : $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$

Elle correspond à la déduction naturelle. Elle affirme simplement que si nous avons un théorème $(p \Rightarrow q)$ et si ses hypothèses p sont vérifiées, alors ses conclusions q sont vérifiées.

7.2 Contraposition

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

7.3 Démonstration par l'absurde

$(\neg p \Rightarrow \mathbf{F}) \Rightarrow (p)$ où **F** est une formule toujours fausse (une *antilogie*).

Cette formule dit simplement que pour montrer p , il suffit de montrer que $\neg p \Rightarrow \mathbf{F}$, c'est-à-dire que $\neg p$ permet d'aboutir à une contradiction.

Voici une variante de la démonstration par l'absurde.

$$((p \wedge \neg q) \Rightarrow \mathbf{F}) \Rightarrow (p \Rightarrow q)$$

7.4 Raisonnement par disjonction des cas

Lors d'un raisonnement par disjonction des cas, on étudie tous les cas possibles en faisant au préalable un tri pour restreindre le nombre de cas à étudier.

8 Quantificateurs

8.1 Pour tout

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x . Le quantificateur universel, noté $\forall$ permet de former la proposition $\forall x \in X, P(x)$ qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour tous les éléments x de X , et qui est fausse si $P(x)$ est fausse pour au moins un élément x de X .

8.2 Il existe

Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x . Le quantificateur existentiel, noté $\exists$, permet de former la proposition $\exists x, P(x)$ qui est vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de X , et qui est fausse si $P(x)$ est fausse pour tous les éléments de X .

8.3 Propriété Négation des quantificateurs

Soit une proposition P , alors on a les équivalences logiques :

- $\neg(\forall x \in X, P(x))$ est équivalente à $\exists x \in X, \neg P(x)$
- $\neg(\exists x \in X, P(x))$ est équivalente à $\forall x \in X, \neg P(x)$

Exercices de la logique en Terminale

EXERCICE 1 - Formalisme

Écrire à l'aide de quantificateurs les énoncés en français suivant :

1. « Le carré d'un nombre réel quelconque est toujours positif ».
2. « Il existe un entier plus petit que tous les autres ».
3. « La suite (u_n) est majorée par 2 ».
4. « Les termes de la suite (u_n) peuvent être rendus aussi grands qu'on veut ».
5. « La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».
6. « La fonction f n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$ ».

EXERCICE 2 - Formalisme encore

Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
2. $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y)$.
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.
6. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

EXERCICE 3 - Dédution

Montrer la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + x + 1 > 0$.

EXERCICE 4 - Équivalence

Soit a et b deux réels positifs.

1. Montrer que $a + b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^2 = y^2 \Leftrightarrow |x| = |y|$.

EXERCICE 5 - Par l'absurde

1. En raisonnant par l'absurde, démontrer que si vous rangez $(n + 1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
2. Démontrer que l'équation $9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$ n'admet pas de solution entière.
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}, |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

EXERCICE 6 - Contraposée

Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

Si n^2 est impair, alors n est impair.

A-t-on démontré la proposition initiale ?

EXERCICE 7 - Contraposée bis

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer par la contraposée que $\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon \implies a = 0$

EXERCICE 8 - Raisonnement par disjonction de cas

1. Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \text{ est pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ est pair}$
2. Que peut-on dire d'un entier n tel que n^2 soit impair ?
3. Démontrer que, pour tout entier relatif n , $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.
4. Démontrer que, pour tout entier relatif n , $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

EXERCICE 9 - Équations

1. Déterminer les réels x tels que $\sqrt{2-x} = x$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $|2x-5| = |x^2-4|$.

EXERCICE 10 - Carré d'un entier

Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.