Correction sujet A

Fonction numérique

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un artisan crée des bonbons au chocolat dont la forme rappelle le profil de la montage locale représentée en **Figure 1**. La base d'un tel bonbon est modélisée par la surface grisée, définie ci-dessous dans un repère orthonormé d'unité 2 cm (**Figure 2**).

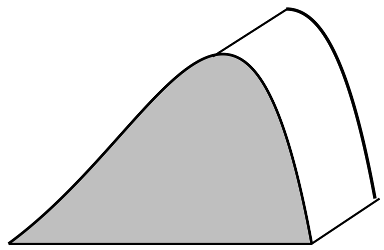


Figure 1

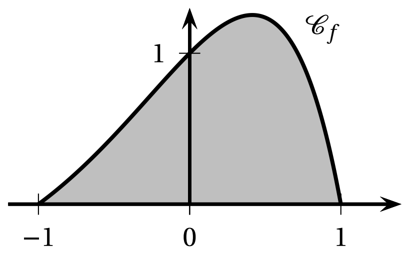


Figure 2

Cette surface est délimitée par l'axe des abscisses et la représentation graphique notée $\mathscr{C}_f$ de la fonction f définie sur $[-1~;~1]$ par :

$$f(x) = \left(1 - x^2\right)\mathrm{e}^x.$$

L'objectif de cette partie est de calculer le volume de chocolat nécessaire à la fabrication d'un bonbon au chocolat.

1. **a.** Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[-1~;~1]$ on a $f(x) \geqslant 0$.

   b. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que :

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 2\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

2. Le volume $\mathcal{V}$ de chocolat, en cm^3, nécessaire à la fabrication d'un bonbon est donné par :

$$\mathcal{V} = 3 \times S$$

   où S est l'aire, en cm^2, de la surface colorée (**Figure 2**).

   En déduire que ce volume $\mathcal{V}$, arrondi à $0,1$ cm^3 près, est égal à $4,4$ cm^3.

Partie B

On s'intéresse maintenant au bénéfice réalisé par l'artisan sur la vente de ces bonbons au chocolat en fonction du volume hebdomadaire des ventes.

Ce bénéfice peut être modélisé par la fonction B définie sur l'intervalle $[0,01~;~+\infty[$ par :

$$B(q) = 8q^2[2 - 3\ln(q)] - 3.$$

Le bénéfice est exprimé en dizaines d'euros et la quantité q en centaines de bonbons.

On admet que la fonction B est dérivable sur $[0,01~;~+\infty[$. On note B' sa fonction dérivée.

1. **a.** Déterminer $\lim\limits_{q \to +\infty} B(q)$.

   b. Montrer que, pour tout $q \geqslant 0,01$, $B'(q) = 8q(1 - 6\ln(q))$.

   c. Étudier le signe de $B'(q)$, et en déduire le sens de variation de B sur $[0,01\ ;\ +\infty[$.
   Dresser le tableau de variation complet de la fonction B.

   d. Quel est le bénéfice maximal, à l'euro près, que peut espérer l'artisan ?

2. **a.** Montrer que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution β sur l'intervalle $[1,2\ ;\ +\infty[$.
   Donner une valeur approchée de β à 10^{-3} près.

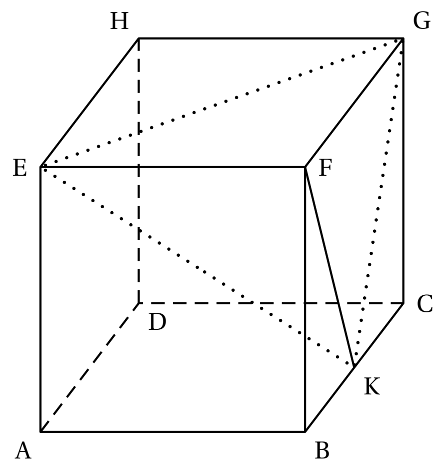
   b. On admet que l'équation $B(q) = 10$ admet une unique solution α sur $[0,01\ ;\ 1,2[$.
   On donne $\alpha \approx 0,757$.
   En déduire le nombre minimal et le nombre maximal de bonbons au chocolat à vendre pour réaliser un bénéfice supérieur à 100 euros.

Géométrie spatiale

On considère un cube ABCDEFGH et on appelle K le milieu du segment [BC].
On se place dans le repère $\left(A\ ;\ \overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AE}\right)$ et on considère le tétraèdre EFGK.
On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathscr{B} \times h$$

où $\mathscr{B}$ désigne l'aire d'une base et h la hauteur relative à cette base.



1. Préciser les coordonnées des points E, F, G et K.
2. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (EGK).
3. Démontrer que le plan (EGK) admet pour équation cartésienne : $2x - 2y + z - 1 = 0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (EGK) passant par F.
5. Montrer que le projeté orthogonal L de F sur le plan (EGK) a pour coordonnées $\left(\frac{5}{9}\ ;\ \frac{4}{9}\ ;\ \frac{7}{9}\right)$.
6. Justifier que la longueur LF est égale à $\dfrac{2}{3}$.
7. Calculer l'aire du triangle EFG. En déduire que le volume du tétraèdre EFGK est égal à $\dfrac{1}{6}$.
8. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle EGK.
9. On considère les points P milieu du segment [EG], M milieu du segment [EK] et N milieu du segment[GK]. Déterminer le volume du tétraèdre FPMN.

Équation différentielle

On se propose d'étudier la concentration dans le sang d'un médicament ingéré par une personne pour la première fois. Soit t le temps (en heures) écoulé depuis l'ingestion de ce médicament.
On admet que la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre de sang, est modélisée par une fonction f de la variable t définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie A : lectures graphiques

On a représenté ci-dessus la courbe représentative de la fonction f. Avec la précision permise par le graphique, donner sans justification :

1. Le temps écoulé depuis l'instant de l'ingestion de ce médicament et l'instant où la concentration de médicament dans le sang est maximale selon ce modèle.
2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \geqslant 1$.
3. La convexité de la fonction f sur l' intervalle $[0;8]$.

Partie B : détermination de la fonction f

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \qquad y' + y = 5\mathrm{e}^{-t},$$

d'inconnue y, où y est une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
On admet que la fonction f est une solution de l'équation différentielle (E).

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + y = 0$.
2. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $u(t) = at\mathrm{e}^{-t}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
   Déterminer la valeur du réel a telle que la fonction u soit solution de l'équation (E).
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. La personne n'ayant pas pris ce médicament auparavant, on admet que $f(0) = 0$.
   Déterminer l'expression de la fonction f.

Partie C : étude de la fonction f

Dans cette partie, on admet que f est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

2. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ puis dresser son tableau de variation complet.

3. Démontrer qu'il existe deux réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 1$.

   On donnera une valeur approchée à 10^{-2} des réels t_1 et t_2.

4. Pour une concentration du médicament supérieure ou égale à 1 gramme par litre de sang, il y a un risque de somnolence.

   Quelle est la durée en heures et minutes du risque de somnolence lors de la prise de ce médicament ?

Partie D : concentration moyenne

La concentration moyenne du médicament (en gramme par litre de sang) durant la première heure est donnée par :

$$T_m = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$$

où f est la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$.
Calculer cette concentration moyenne.
On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 0,01 près.

Probabilité

Léa passe une bonne partie de ses journées à jouer à un jeu vidéo et s'intéresse aux chances de victoire de ses prochaines parties.

Elle estime que si elle vient de gagner une partie, elle gagne la suivante dans 70 % des cas.

Mais si elle vient de subir une défaite, d'après elle, la probabilité qu'elle gagne la suivante est de $0,2$.
De plus, elle pense avoir autant de chance de gagner la première partie que de la perdre.
On s'appuiera sur les affirmations de Léa pour répondre aux questions de cet exercice.

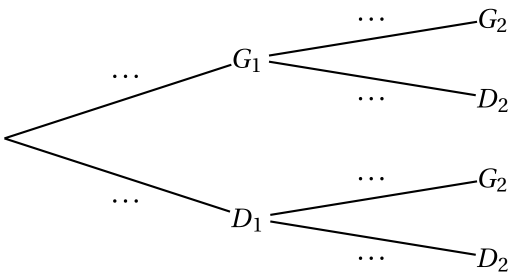
Pour tout entier naturel n non nul, on définit les évènements suivants :

- G_n : « Léa gagne la n-ième partie de la journée » ;
- D_n : « Léa perd la n-ième partie de la journée ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note g_n la probabilité de l'évènement G_n.
On a donc $g_1 = 0,5$.

1. Quelle est la valeur de la probabilité conditionnelle $p_{G_1}(D_2)$?

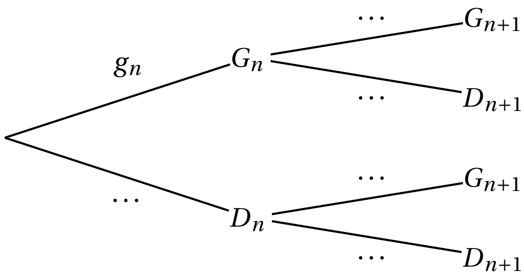
2. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les deux premières parties de la journée :



3. Calculer g_2.

4. Soit n un entier naturel non nul.

   a. Recopier et compléter l'arbre des probabilités ci-dessous qui modélise la situation pour les n-ième et $(n+1)$-ième parties de la journée.



   b. Justifier que pour tout entier naturel n non nul,

$$g_{n+1} = 0,5g_n + 0,2.$$

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = g_n - 0,4$.

   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
   On précisera son premier terme et sa raison.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$g_n = 0,1 \times 0,5^{n-1} + 0,4.$$

6. Étudier les variations de la suite (g_n).

7. Donner, en justifiant, la limite de la suite (g_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

8. Déterminer, par le calcul, le plus petit entier n tel que $g_n - 0,4 \leqslant 0,001$.

9. Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 de la fonction suivante, écrite en langage Python, afin qu'elle renvoie le plus petit rang à partir duquel les termes de la suite (g_n) sont tous inférieurs ou égaux à $0,4 + e$, où e est un nombre réel strictement positif.

```
1  def seuil(e) :
2      g = 0.5
3      n = 1
4      while ... :
5          g = 0.5 * g + 0.2
6          n = ...
7      return (n)
```