

Le sujet comporte 3 pages et 4 exercices qui sont tous à traiter

La calculatrice, en mode examen, est autorisée

Durée de l'épreuve : 4 heures

Indiquez clairement le numéro de l'exercice que vous traitez ainsi que le numéro de la question

EXERCICE 1 (6 points)

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3} .

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.

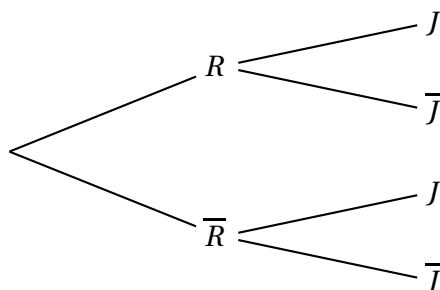
Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :

- R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».
- J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $0,056$ à 10^{-3} près.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.

La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun. Cette affirmation est-elle vraie? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées?

EXERCICE 2 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, dire si l'énoncé est vrai ou faux et justifier.
Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

1. On considère les points de l'espace :
 $A(1, 0, 3)$, $B(4, 1, 0)$, $C(7, 2, -3)$

a. **AFFIRMATION 1 :** A , B et C forment un plan.

b. **AFFIRMATION 2 :** Un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = -2 + 3k \\ y = -1 + k \\ z = 6 - 3k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}$$

2. On considère les droites d'équations paramétriques :

$$(d) : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 6t \\ z = 4 - 2t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \qquad (d') : \begin{cases} x = -2 + 3s \\ y = -1 - 2s \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R}$$

a. **AFFIRMATION 3 :** Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d .

b. **AFFIRMATION 4 :** (d) et (d') sont sécantes.

EXERCICE 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en 1.
 - b. En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3.
 - a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$

- b. Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x}{(x-1)^3}.$$

- a. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
 - b. Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
 - c. En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $] -\infty ; 1[$, on a :
- $$e^x \geq (-2x-1)(x-1).$$
5.
 - a. Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $] -\infty ; 1[$.
 - b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :  
    u = ...  
    for i in range(n):  
        u = ...  
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] - 3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] - 3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n.$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

- a. Donner v_0 .
- b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
- c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

- d. Déterminer la limite de la suite (u_n) .