

Le sujet comporte 4 pages et 4 exercices qui sont tous à traiter

La calculatrice, en mode examen, est autorisée

Durée de l'épreuve : 4 heures

**Indiquez clairement le numéro de l'exercice que vous traitez ainsi
que le numéro de la question**

EXERCICE 1 (5 points)

Une entreprise de location de bateaux de tourisme propose à ses clients deux types de bateaux : bateau à voile et bateau à moteur.

Par ailleurs, un client peut prendre l'option PILOTE. Dans ce cas, le bateau, qu'il soit à voile ou à moteur, est loué avec un pilote.

On sait que :

- 60 % des clients choisissent un bateau à voile ; parmi eux, 20 % prennent l'option PILOTE.
- 42 % des clients prennent l'option PILOTE.

On choisit au hasard un client et on considère les événements :

- V : « le client choisit un bateau à voile » ;
- L : « le client prend l'option PILOTE ».

Les trois parties peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A

1. Traduire la situation par un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.
2. Calculer la probabilité que le client choisisse un bateau à voile et qu'il prenne l'option PILOTE.
3. Démontrer que la probabilité que le client ne choisisse pas un bateau à moteur et qu'il prenne l'option PILOTE est égale à 0,30.
4. En déduire $P_{\overline{V}}(L)$, probabilité de L sachant que V n'est pas réalisé.
5. Un client a pris l'option PILOTE.
Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un bateau à voile ? Arrondir à 0,01 près.

Partie B

Lorsqu'un client ne prend pas l'option PILOTE, la probabilité que son bateau subisse une avarie est égale à 0,12. Cette probabilité n'est que de 0,005 si le client prend l'option PILOTE.

On considère un client. On note A l'événement : « son bateau subit une avarie ».

1. Déterminer $P(L \cap A)$ et $P(\overline{L} \cap A)$.
2. L'entreprise loue 1 000 bateaux.
À combien d'avaries peut-elle s'attendre ?

Partie C

On rappelle que la probabilité qu'un client donné prenne l'option PILOTE est égale à 0,42.

On considère un échantillon aléatoire de 40 clients. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de clients de l'échantillon prenant l'option PILOTE.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Donner sans justification ses paramètres.
2. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3} , que moins de 15 clients prennent l'option PILOTE.

EXERCICE 2 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, dire si l'énoncé est vrai ou faux et justifier.

Une réponse non justifiée ne rapportera aucun point.

1. On considère les points de l'espace :

$A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 3)$, $C(2, -1, 0)$, $D(1, 2, 5)$ et $E(1, 3, 5)$.

a. **AFFIRMATION 1 :** A , C et E sont alignés.

b. **AFFIRMATION 2 :** Les points A , B , C et D sont coplanaires.

2. On considère les droites d'équations paramétriques :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 1 + r \\ y = 1 + r \\ z = 5 + 2r \end{cases} \quad \text{où } r \in \mathbb{R} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + s \\ z = 4 + s \end{cases} \quad \text{où } s \in \mathbb{R} \quad (d_3) : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - 4t \end{cases} \quad \text{où } t \in \mathbb{R}$$

a. **AFFIRMATION 3 :** (d_1) et (d_2) sont parallèles.

b. **AFFIRMATION 4 :** Ces trois droites sont concourantes.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3 ; 4]$ une unique solution qui sera notée α .
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

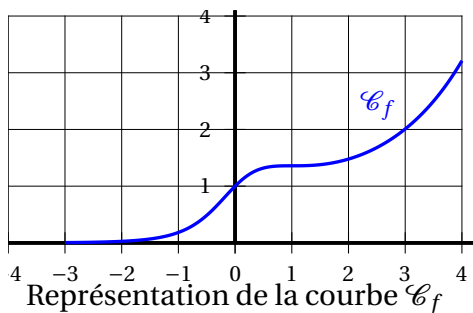
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3 ; 4]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1.
 - a. Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.
 - b. Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



- a. D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations? Argumenter.
- b. On admet que la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'' , répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations? ». Justifier.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et, pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}.$$

1. Calculer u_1 .
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
En déduire que pour tout réel $x > 2$, on a $f(x) > 2$.
 - b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $u_n > 2$.
3. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

- a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

- a. Calculer v_0 .
 - b. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.
 - c. Déterminer, en justifiant, la limite de (v_n) .
En déduire la limite de (u_n) .

5. On considère la fonction Python seuil ci-contre, où A est un nombre réel strictement plus grand que 2.

Donner, sans justification, la valeur renvoyée par la commande `seuil(2.001)` puis interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(A):  
    n = 0  
    u = 8  
    while u > A:  
        u = (6*u + 2)/(u + 5)  
        n = n + 1  
    return n
```