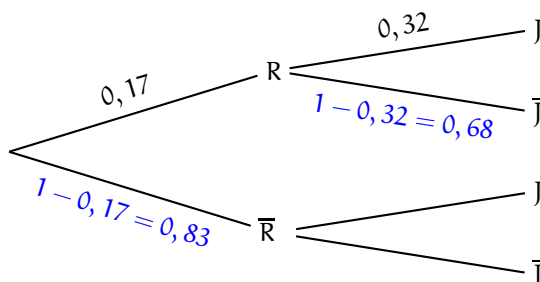


Corrigé du bac blanc - vendredi 16 janvier

EXERCICE 1 (6 points)

Partie A

1. On représente la situation à l'aide de cet arbre pondéré :



2. $P(R \cap J) = 0,17 \times 0,32 = 0,0544$
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française, donc $P(J) = 0,11$.

La probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est $P(\bar{R} \cap J)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(J) = P(R \cap J) + P(\bar{R} \cap J) \text{ donc } P(\bar{R} \cap J) = P(J) - P(R \cap J) = 0,11 - 0,0544 = 0,0556$$

soit $0,056$ à 10^{-3} près.

4. $P_{\bar{R}}(J) = \frac{P(\bar{R} \cap J)}{P(\bar{R})} = \frac{0,056}{0,83} \approx 0,0675$

La proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun est donc d'environ 6,75 %.

Partie B

1. • On interroge une personne au hasard et il n'y a que deux possibilités : elle utilise régulièrement les transports en commun, avec une probabilité $p = 0,17$, ou pas, avec une probabilité de $1 - p = 0,83$.
• On réalise $n = 50$ fois ce questionnaire de façon identique.

Donc la variable aléatoire X qui donne le nombre de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,17$.

2. $P(X = 5) = \binom{50}{5} \times 0,17^5 \times (1 - 0,17)^{50-5} \approx 0,069$

Il y a donc une probabilité de $0,069$ que, sur 50 personnes interrogées, exactement 5 prennent régulièrement les transports en commun.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Autrement dit, le recenseur affirme que $P(X < 13) \geq 0,95$.

Or $P(X < 13) = P(X \leq 12) \approx 0,929 < 0,95$ donc cette affirmation est fausse.

4. Le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées est $E(X) = np = 50 \times 0,17 = 8,5$.

EXERCICE 2 (4 points)

1. On considère les points A(1; 0; 3) et B(4; 1; 0).

Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}. M(x; y; z) \in (AB) \iff \overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x-1 = 3t \\ y-0 = 1t \\ z-3 = -3t, \end{cases} t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 1+3t \\ y = t \\ z = 3-3t \end{cases} t \in \mathbb{R} \text{ Réponse c.}$$

2. Réponse d.

3. Réponse c.

4. • Les deux droites ont pour vecteurs directeurs respectifs : $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, les droites ne sont pas parallèles.

- Les deux droites sont sécantes s'il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} 3+4t = -2+3k \\ 6t = -1-2k \\ 4-2t = 1+k \end{cases} \iff \begin{cases} 4t = 3k-5 \\ 6t = -2k-1 \\ -2t = k-3 \end{cases}$$

Par différence de la ligne 1 et de la ligne 2, on obtient $-2t = 5k - 4 = k - 3$ (ligne 3) soit $4k = 1 \iff k = \frac{1}{4}$, puis comme $-2t = k - 3 = \frac{1}{4} - 3 = -\frac{11}{4}$, d'où $t = \frac{11}{8}$, mais la première ligne donne $4t = 3k - 5 = \frac{3}{4} - 5 = -\frac{17}{4}$, d'où $t = \frac{17}{8}$: ceci n'est pas possible : les deux droites ne sont pas sécantes.

- Les deux droites ne sont pas confondues : il reste la réponse b.

EXERCICE 3 (5 points)

1. (a) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 1} e^x = e > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = -\infty$.

(b) On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0$.

3. (a) $f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$.

(b) Pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $e^x > 0$, $(x-1)^2 > 0$ et $x-2 < 0$. D'où le tableau :

x	$-\infty$ 1
f'(x)	—
f	0 $-\infty$

4. (a) $f''(x) > 0 \iff x^2 + 4x + 5 < 0$ puisque $e^x > 0$ et $(x-1)^3 < 0$ pour tout $x \in]-\infty; 1[$.

Or $\Delta = 4^2 - 4 \times 5 \times 1 = -4 < 0$, donc $x^2 + 4x + 5 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La fonction est donc concave.

(b) L'équation est $y = f'(0)(x-0) + f(0) = -2x - 1$.

(c) La fonction étant concave, la courbe est en-dessous de ses tangentes et donc de sa tangente au point d'abscisse 0 : Pour tout $x \in]-\infty; 1[$, $f(x) \leq -2x - 1$, soit $\frac{e^x}{x-1} \leq -2x - 1$ et donc $e^x \geq (x-1)(-2x-1)$ puisque $x-1 < 0$.

5. (a) f est continue puisque dérivable, strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$ et $-2 \in]-\infty; 0[= f(]-\infty; 1[)$.
Donc, d'après le théorème de bijection, l'équation $f(x) = -2$ admet une solution unique dans $]-\infty; 1[$.
(b) Par balayage on trouve $0,31 < \alpha < 0,32$.

EXERCICE 4

1. $u_1 = -\frac{4}{3}$ et $u_2 = -\frac{8}{5}$.

2.

```
def terme (n) :  
    u = 0  
    for i in range(n):  
        u = (-u-4)/(u+3)  
    return(u)
```

3. f est dérivable comme quotient et $f'(x) = \frac{-(x+3) - (-x-4)}{(x+3)^2} = \frac{1}{(x+3)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur $]-3; +\infty[$.

4. On va démontrer par récurrence $\mathcal{P}_n : -2 < u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation : $-2 < -\frac{4}{3} \leq 0$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$, supposons $\mathcal{P}_n$. On a donc :

$$\begin{aligned} -2 &< u_{n+1} &&\leq u_n \\ f(-2) &< f(u_{n+1}) &&\leq f(u_n) \text{ puisque } f \text{ est strictement croissante.} \\ -2 &< u_{n+2} &&\leq u_{n+1} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion : $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est héréditaire et initialisée, donc on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}, -2 < u_{n+1} \leq u_n$.

5. La suite est donc décroissante et minorée et donc converge d'après le théorème de la convergence monotone.

6. (a) $v_0 = \frac{1}{2}$.

(b) Montrons que v est arithmétique de raison 1 :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} \\ &= \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} \\ &= \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2u_n + 6}{u_n + 3}} \\ &= \frac{u_n + 3}{u_n + 2} \\ &= 1 + \frac{1}{u_n + 2} \\ &= 1 + v_n \end{aligned}$$

- (c) On a donc $v_n = v_0 + 1 \times n = \frac{1}{2} + n$, et comme $u_n = \frac{1}{v_n} - 2$, $u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + n} - 2$.

(d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + n} = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.