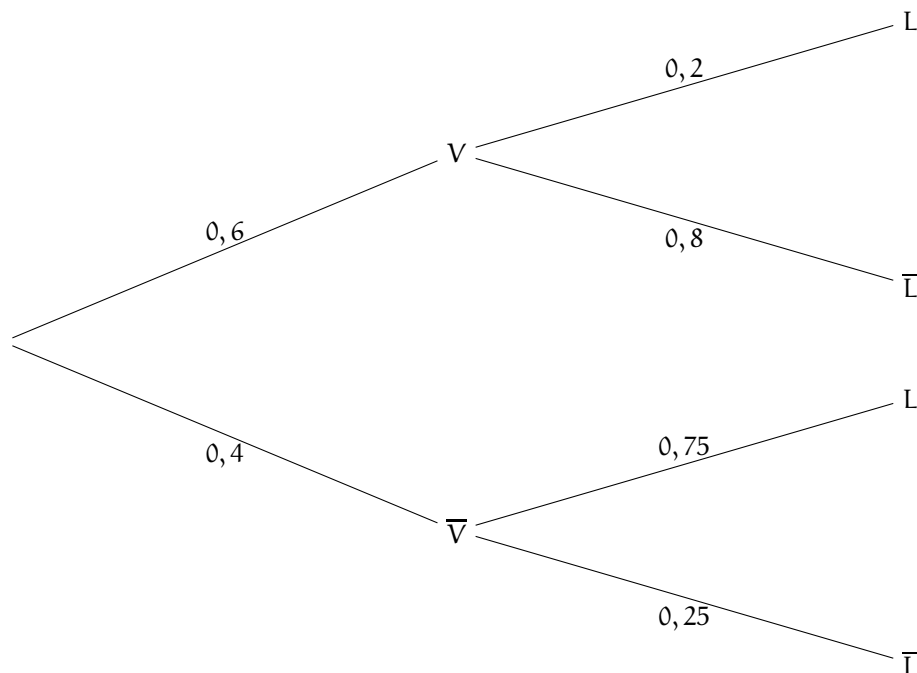


Exercice 1

Partie A

1. À terme, on obtient :



2. La probabilité qu'un client choisisse un bateau à voile et qu'il ne prenne pas l'option PILOTE est $P(V \cap \bar{L})$.

$$P(V \cap \bar{L}) = P(V) \times P_V(\bar{L}) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$$

3. Les événements V et $\bar{V}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(L) = P(V \cap L) + P(\bar{V} \cap L)$$

On a $P(V \cap L) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$.

Posons $P(\bar{V} \cap L) = p$. On a :

$$P(L) = 0,12 + p \iff 0,42 = 0,12 + p \iff p = 0,42 - 0,12 = 0,3$$

On a donc bien $P(\bar{V} \cap L) = 0,3$.

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_{\bar{V}}(L) = \frac{P(\bar{V} \cap L)}{P(\bar{V})} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4} = 0,75$$

5. La probabilité qu'un client ait choisi un voilier, sachant qu'il a pris l'option PILOTE est, d'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$P_L(V) = \frac{P(V \cap L)}{P(L)} = \frac{0,12}{0,42} = \frac{2}{7} = 0,29 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Partie B

1.

$$P(L \cap A) = P(L) \times P_L(A) = 0,42 \times 0,005 = 0,0021$$

$$P(\bar{L} \cap A) = P(\bar{L}) \times P_{\bar{L}}(A) = (1 - 0,42) \times 0,12 = 0,0696$$

2. Les événements L et $\bar{L}$ forment une partition de l'univers, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(A) = P(L \cap A) + P(\bar{L} \cap A) = 0,0021 + 0,0696 = 0,0717$$

La probabilité que le bateau loué par un client choisi au hasard subisse une avarie est donc 0,0717.

Puisque l'entreprise loue 1 000 bateaux, elle peut s'attendre à $1\,000 \times 0,0021 \approx 72$ avaries.

Partie C

- Les paramètres de la loi binomiale suivie par X sont $n = 40$ et $p = 0,42$.
- À l'aide de la calculatrice, on calcule $P(X \geq 15)$:

$$P(X \geq 15) = 0,768 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

Exercice 2

- FAUX : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. S'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE}$ alors $k = 3$ et $2k = 5$ ce qui est impossible. Les vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés.
 - VRAI : $\overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, A , B et D sont alignés donc D est sur n'importe quel plan contenant A et B donc sur (ABC) . Les 4 points sont donc bien coplanaires.
- FAUX : Soit $\vec{u}_1$ le vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2$ celui de d_2 . $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Comme l'abscisse de $\vec{u}_2$ est nulle et pas celle de $\vec{u}_1$, les vecteurs ne sont pas colinéaires et les droites ne sont pas parallèles.
 - VRAI : On va trouver l'intersection de d_1 et d_2 et montrer qu'elle est sur d_3 : On considère le système :
$$\begin{cases} 1 + r = 0 \\ 1 + r = 1 + s \\ 5 + 2r = 4 + s \end{cases}$$
On trouve alors $s = r = -1$ à partir des 2 premières ce que la troisième confirme. On a donc le point $F(0, 0, 3)$ qui est sur d_1 et d_2 . En prenant $t = -1$ on voit que $F \in d_3$: Les 3 droites sont bien concourantes.

EXERCICE 3 (6 points)

Partie A

- La fonction p est continue et dérivable sur $[-3; 4]$.
 $\forall x \in [-3; 4], p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$
Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$)
donc $\forall x \in [-3; 4], p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3; 4]$.
- $p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$
La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3; 4]$ à valeurs dans $[-68; 37]$. Or $0 \in [-68; 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[-3; 4]$.
- À la calculatrice, on obtient $\alpha \approx -0,2$.
- D'après les variations de la fonction p , et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3; 4]$:

x	-3	α	4
p(x)	-	0	+

Partie B

1. (a) La fonction f est continue et dérivable sur $[-3; 4]$ (car $\forall x \in [-3; 4], 1 + x^2 \neq 0$).

$$\forall x \in [-3; 4], f'(x) = \frac{e^x \times (1 + x^2) - e^x \times 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 1)}{(1 + x^2)^2} = \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2}.$$

$$(b) f'(x) = 0 \iff \frac{(x - 1)^2 e^x}{(1 + x^2)^2} = 0 \iff (x - 1)^2 e^x \iff (x - 1)^2 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Et $f(1) = \frac{e}{2}$. Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale d'équation $y = \frac{e}{2}$.

2. (a) Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3; 0]$;
- concave sur $[0; 1]$;
- convexe sur $[1; 4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

$$(b) \forall x \in [-3; 4] : f''(x) = \frac{p(x)(x - 1)e^x}{(1 + x^2)^3}$$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3; 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3; 4], (1 + x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x - 1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3	α	1	4
p(x)	-	0	+	+
x - 1	-	-	0	+
f''(x)	+	0	-	+

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.

EXERCICE 4 (5 points)

1. Pour $n = 0$, on a $u_1 = \frac{6 \times 8 + 2}{8 + 5} = \frac{50}{13}$.

2.

$$f(x) = \frac{6x + 2}{x + 5}.$$

- (a) Le dénominateur étant supérieur à 5, il ne s'annule pas : la fonction f est donc dérivable sur $[0; +\infty[$ et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{6(x + 5) - 1(6x + 2)}{(x + 5)^2} = \frac{6x + 30 - 6x - 2}{(x + 5)^2} = \frac{28}{(x + 5)^2} : \text{quotient de deux nombres supérieurs à zéro, cette dérivée est donc supérieure à zéro : la fonction } f \text{ est donc strictement croissante sur } [0; +\infty[\text{ et son minimum est } f(0) = \frac{2}{5} = 0,4.$$

$$\text{On a } f(2) = \frac{6 \times 2 + 2}{2 + 5} = \frac{14}{7} = 2.$$

Or comme f est croissante sur $[0; +\infty[: x > 2 \implies f(x) > f(2) = 2$ d'après le calcul précédent.

(b) *Initialisation* : $u_0 = 8 > 2$: la relation est vraie au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2$.

Alors par croissance de la fonction f : $f(u_n) > f(2) = 2$.

Or $f(u_n) = u_{n+1}$: on a donc $u_{n+1} > 2$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , $n \in \mathbb{N}$ elle l'est aussi au rang $n + 1$. Par le principe de récurrence quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

3. On admet que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(2 - u_n)(u_n + 1)}{u_n + 5}.$$

(a) On a $u_n > 2 \implies u_n + 1 > 2 + 1 > 0$ et $u_n > 2 \implies u_n + 5 > 2 + 5 > 0$.

Le signe du quotient précédent est donc celui de $2 - u_n$; or $u_n > 2 \implies$

$0 > 2 - u_n$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

(b) La suite (u_n) étant décroissante et minorée par 2 est donc convergente vers une limite ℓ , avec $\ell \geq 2$.

4. On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel par :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}.$$

(a) $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 + 1} = \frac{8 - 2}{8 + 1} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$

(b) On sait que $u_{n+1} = \frac{6u_n + 2}{u_n + 5}$

Or $v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 1}$ et en utilisant la relation précédente :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} - 2}{\frac{6u_n + 2}{u_n + 5} + 1} = \frac{\frac{6u_n + 2 - 2u_n - 10}{u_n + 5}}{\frac{6u_n + 2 + u_n + 5}{u_n + 5}} = \frac{4u_n - 8}{7u_n + 7} = \frac{4(u_n - 2)}{7(u_n + 1)} = \frac{4}{7}v_n.$$

La relation $v_{n+1} = \frac{4}{7}v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ signifie que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{4}{7}$.

(c) • On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \left(\frac{4}{7}\right)^n$ ou encore $v_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{7}\right)^n$.

Or comme $-1 < \frac{4}{7} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$ et par produit de limites $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n - 2}{u_n + 1} = 0$ et comme $u_n + 1 > 2 + 1 > 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 2 = 0$, soit enfin $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$.
Donc $\ell = 2$.

(d) On vérifie à la calculatrice que $u_{14} \approx 2,000\,79$ est le premier terme inférieur à 2,001. Valeur renvoyée : 14.