

∞ DST de mathématique en Tal spé ∞

EXERCICE 1 points

Thème : probabilités

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique. Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate-forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,5;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,375.

On considère les événements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique »;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique »;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

- a. Calculer la probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique.
On pourra utiliser un arbre pondéré.
 - b. Démontrer que $P(C) = 0,4$.
 - c. On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique.
Calculer la probabilité que le client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique.
2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne. On rappelle que 20 % des clients sont intéressés par l'achat d'un véhicule à moteur électrique.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.
 - a. Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X .
 - b. Calculer l'espérance $\mathbb{E}[X]$ de la variable X . Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.
 - c. Calculer la probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée. Donner le résultat arrondi à 10^{-2} près.
3. Combien la concession doit-elle attendre de clients au minimum, pour que, parmi ceux-là, la probabilité qu'au moins un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique soit supérieure à 95 % ?

EXERCICE 2 points**Thème : fonctions***Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment***Partie A**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ (on pourra développer le terme dans $f(x)$).
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}$.
 - b. En déduire que la fonction f' admet un minimum en $\frac{3}{2}$ sur $\mathbb{R}$; calculer ce minimum.
 - c. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
 - d. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[-1; 0]$.
 - e. Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

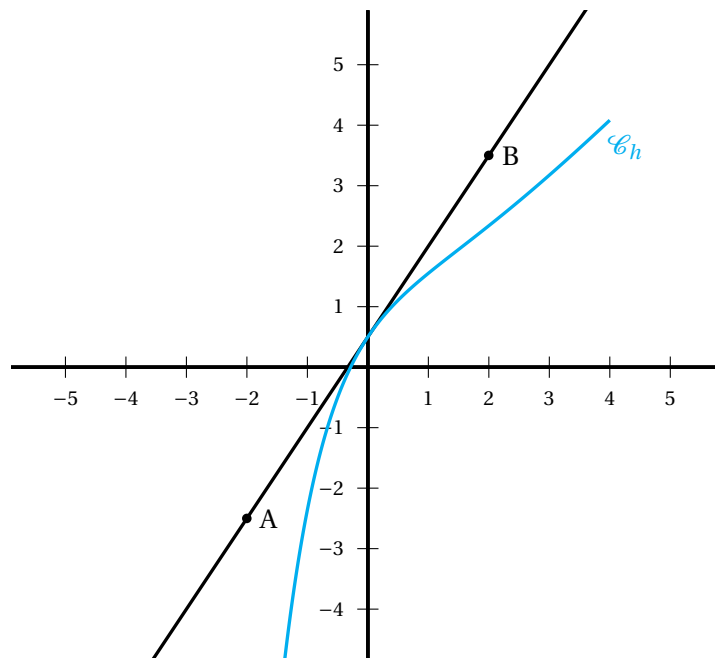
Partie B

On considère une fonction h , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b) e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2; -2,5)$ et $(2; 3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, l'abscisse du point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h .
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression $h''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}$.
Valider ou non la conjecture précédente.
3. Montrer qu'une équation de la droite (AB) est : $y = 1,5x + 0,5$.
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, calculer les valeurs de a et b .

Corrigé

EXERCICE 1

Thème : probabilités

Une concession automobile vend des véhicules à moteur électrique et des véhicules à moteur thermique.

Certains clients, avant de se rendre sur le site de la concession, ont consulté la plate- forme numérique de la concession. On a ainsi observé que :

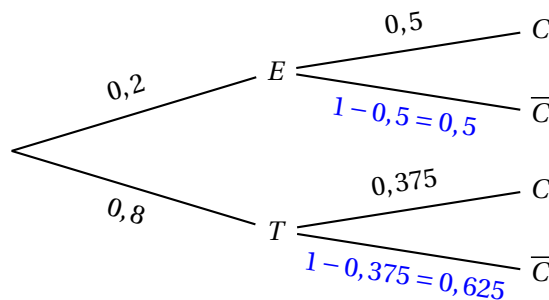
- 20 % des clients sont intéressés par les véhicules à moteur électrique et 80 % préfèrent s'orienter vers l'achat d'un véhicule à moteur thermique;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur électrique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,5;
- lorsqu'un client souhaite acheter un véhicule à moteur thermique, la probabilité pour que le client ait consulté la plate-forme numérique est de 0,375.

On considère les événements suivants :

- C : « un client a consulté la plate-forme numérique »;
- E : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique »;
- T : « un client souhaite acquérir un véhicule à moteur thermique ».

Les clients font des choix indépendants les uns des autres.

1. a. On résume les informations dans un arbre pondéré.



La probabilité qu'un client choisi au hasard souhaite acquérir un véhicule à moteur électrique et ait consulté la plate-forme numérique est :

$$P(E \cap C) = P(E) \times P_E(C) = 0,2 \times 0,5 = 0,1.$$

- b. D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(E \cap C) + P(T \cap C) = 0,1 + 0,8 \times 0,375 = 0,4.$$

- c. On suppose qu'un client a consulté la plate-forme numérique; la probabilité qu'il souhaite acheter un véhicule à moteur électrique est :

$$P_C(E) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25.$$

2. La concession accueille quotidiennement 17 clients en moyenne. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de clients souhaitant acquérir un véhicule à moteur électrique.

- a. Les clients font des choix indépendants les uns des autres, donc on a une répétition de 17 épreuves indépendantes dont la probabilité de succès de chacune est $p = 0,2$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 17$ et $p = 0,2$.

- b. La probabilité qu'au moins trois des clients souhaitent acheter un véhicule à moteur électrique lors d'une journée est $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0,3096$$

Donc la probabilité cherchée est d'environ 0,69.

EXERCICE 2**Thème : fonctions****Partie A**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$.

1. On détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite en $-\infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

- Limite en $+\infty$

$f(x) = x e^{-x} + \frac{1}{2} e^{-x} + x$. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et que

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

- a. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + x$ donc

$$f'(x) = 1 \times e^{-x} + \left(x + \frac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} + 1 = \left(-x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} + 1, \text{ et donc}$$

$$f''(x) = -1 \times e^{-x} + \left(-x + \frac{1}{2}\right) \times (-1) e^{-x} = \left(x - \frac{3}{2}\right) e^{-x}.$$

- b. Le signe de f'' donne les variations de f' .

Pour tout x , $e^{-x} > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $\left(x - \frac{3}{2}\right)$.

- Si $x < \frac{3}{2}$, $f''(x) < 0$ donc f' est décroissante;
- Si $x > \frac{3}{2}$, $f''(x) > 0$ donc f' est croissante;
- Si $x = \frac{3}{2}$, $f''(x) = 0$ donc f' admet un minimum égal à
$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{3}{2}} + 1 = 1 - e^{-\frac{3}{2}}.$$

- c. La fonction f' admet pour minimum

$$f'\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - e^{-\frac{3}{2}} \approx 0,78 > 0; \text{ donc pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

- d.
 - La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.
 - Pour tout réel x , $f'(x) > 0$ donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

- e. On appelle α la solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) \approx -2,36 < 0 \\ f(0) = 0,5 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-1; 0]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,3) \approx -0,03 < 0 \\ f(-0,2) \approx 0,17 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,3; -0,2]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,29) \approx -0,009 < 0 \\ f(-0,28) \approx 0,011 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,29; -0,28]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(-0,286) \approx -0,001 < 0 \\ f(-0,285) \approx 0,0009 > 0 \end{array} \right\} \text{ donc } \alpha \in [-0,286; -0,285]$$

Donc $-0,285$ est une valeur approchée à 10^{-3} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

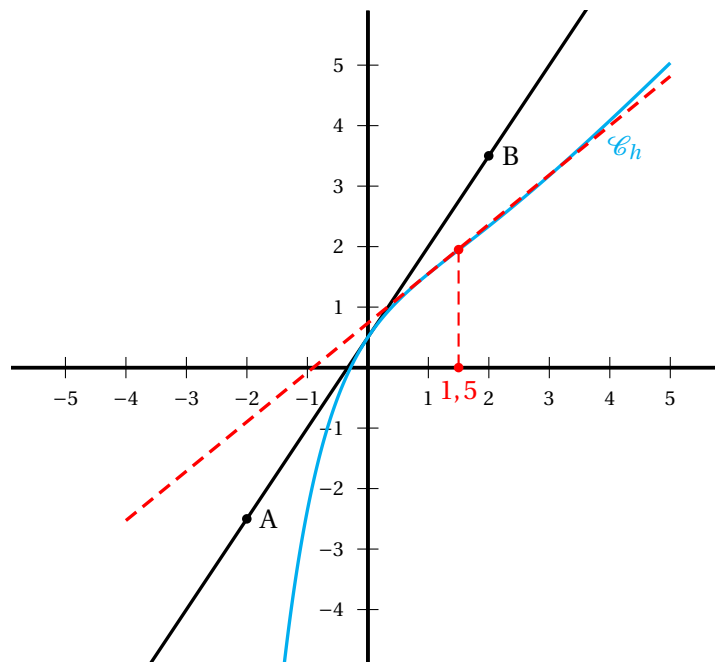
Partie B

On considère une fonction h , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax + b)e^{-x} + x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux réels.}$$

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_h$ de la fonction h ;
- les points A et B de coordonnées respectives $(-2; -2,5)$ et $(2; 3,5)$.



1. Avec la précision permise par le graphique, on peut conjecturer que la courbe représentative de la fonction h admet un unique point d'inflexion d'abscisse 1,5.

2. On admet que $h''(x) = -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x}$.

$$h''(x) = 0 \iff -\frac{3}{2}e^{-x} + xe^{-x} = 0 \iff \left(x - \frac{3}{2}\right)e^{-x} = 0 \iff x - \frac{3}{2} = 0 \iff x = 1,5$$

La conjecture est donc vérifiée.

3. Déterminer une équation de la droite (AB) c'est chercher l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que : $\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

$$\begin{aligned} \frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} &\iff \frac{y + 2,5}{x + 2} = \frac{3,5 + 2,5}{2 + 2} \iff \frac{y + 2,5}{x + 2} = \frac{6}{4} \iff y + 2,5 = \frac{6}{4}(x + 2) \\ &\iff y = \frac{3}{2}x + 3 - 2,5 \iff y = 1,5x + 0,5 \end{aligned}$$

La droite (AB) a pour équation : $y = 1,5x + 0,5$.

-
4. La droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, donc $h'(0) = 1,5$.

$$h'(x) = a \times e^{-x} + (ax + b) \times (-1) e^{-x} + 1 = (-ax + a - b) e^{-x} + 1$$

$$h'(0) = 1,5 \iff (a - b) e^0 + 1 = 1,5 \iff a - b = 0,5$$

La droite (AB) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 0,5 donc $h(0) = 0,5$.

$$h(0) = 0,5 \iff (0 + b) e^0 + 0 = 0,5 \iff b = 0,5$$

Comme $a - b = 0,5$, on en déduit que $a = 1$.

Donc $h(x) = (x + 0,5) e^{-x} + x = f(x)$.