

DST de mathématiques spécialité en terminale

EXERCICE SUR LES SUITES

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$$

On a pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

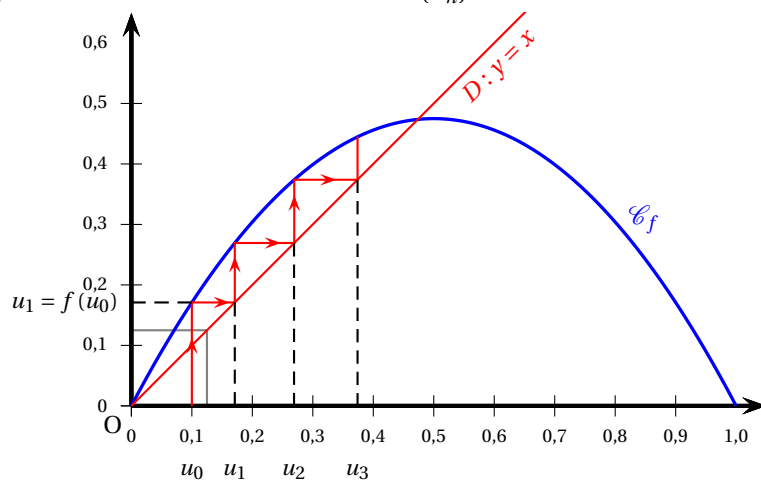
1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. a. En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

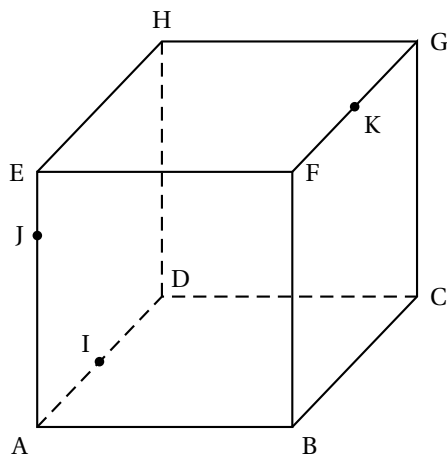
b. En déduire que la suite (u_n) converge.

c. Déterminer sa limite.

EXERCICE SUR LA GÉOMÉTRIE SPATIALE

La figure dessous représente un cube $ABCDEFGH$. Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment $[AD]$; — J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$; — K est le milieu du segment $[FG]$.

**Partie A**

Les constructions se feront au crayon à papier. Vous laisserez en traits légers mais visibles vos constructions.

1. Sur la figure, construire en justifiant la construction, le point d'intersection M du plan (IJK) et de la droite (EH) . On laissera les traits de construction sur la figure.
2. Nommer puis construire l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG) .
3. Construire les points d'intersection N et P de (MK) avec (EF) et (HG) .
4. En utilisant la droite (IJ) , construire le point d'intersection Q de la droite (HD) avec le plan IJK .
5. En utilisant (PQ) , construire les points S et T intersection du plan IJK et des droites (CD) et (CG) .
6. Repasser en rouge, la section du plan IJK et du cube $ABCDEFGH$ (on trouve six segments à raison d'un par face sur chacune des six faces).

Partie B

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

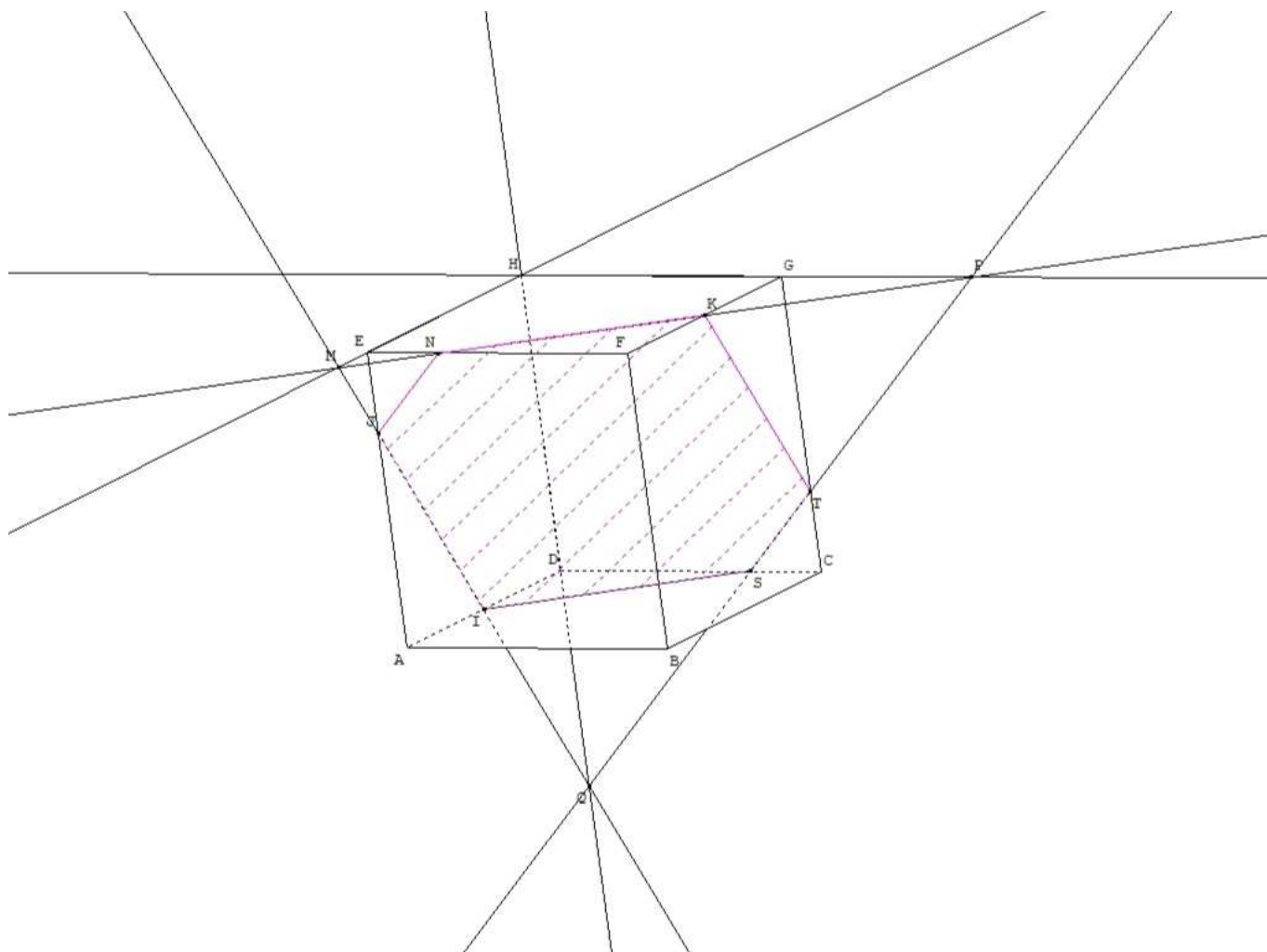
On donne les points $A(1, 1, 4)$, $B(0, -1, 0)$, $C(1, 0, 3)$ et $E(-1, 1, 0)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
3. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire?
4. Montrer qu'un système d'équations paramétriques de la droite (AB) est :
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 4 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$
5. On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est : $(d) : \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = -2 \\ z = 1 + 2t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}$
 - a. Donner par ses coordonnées un point M et un vecteur directeur $\vec{w}$ de (d) .
 - b. (d) et (AB) sont-elles parallèles? Justifier.
 - c. Montrer que (d) et (AB) sont sécantes en un point N dont on calculera les coordonnées.

Corrigé de l'exercice de géométrie spatiale

Partie A

1. La figure :



(IJ) est une droite du plan IJK mais aussi du plan ADHE; (EH) est aussi une droite de ce plan. L'intersection visible M des droites (IJ) et (EH) est bien un point existant et c'est l'intersection du plan IJK et de la droite (EH).

2. C'est la droite (MK).

3. Voir figure.

4. Voir figure.

5. Voir figure.

6. Voir figure.

Partie B

1. $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Les listes des coordonnées des deux vecteurs précédents ne sont pas proportionnelles, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par conséquent, les points A, B et C ne sont pas alignés.

3. On a : $\overrightarrow{AE} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On traduit l'égalité $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ à l'aides coordonnées ; ce qui donne :
$$\begin{cases} -2 &= a \\ 0 &= -2a - b \\ -4 &= -4a - b \end{cases}$$

Les solutions : $a = 2$, $b = -4$ (Sans oublier de vérifier la dernière égalité restante).

4. On reconnait un système d'équations paramétriques de la droite qui passe par A et qui dirigée par $\overrightarrow{BA}$; c'est-à-dire (AB) .
5. a. En lisant le système, on trouve comme point de coordonnées $(1, -2, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- b. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{w}$ n'ayant pas leurs coordonnées proportionnelles, ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.
- c. On résout le système obtenu en concaténant les systèmes d'équations paramétriques des deux droites. La résolution donne $t = t' = -\frac{3}{2}$ ce qui donne le point $N(-\frac{1}{2}, -2, -2)$.

Corrigé de l'exercice sur la suite

1. $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
- a. $f'(x) = 1,9(1 - 2x)$, d'où le tableau de variations :

x	1	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	0,475	0

- b. Le maximum de f sur $[0 ; 1]$ est 0,475 et le minimum est 0, par suite $\forall x \in [0 ; 1], f(x) \in [0 ; 1]$.
2. La suite semble croissante et converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = x$; soit $l \approx 0,5$.
3. Récurrence :
- a. pour $n \in \mathbb{N}$, appelons $\mathcal{P}_n$ l'énoncé : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ». On montre que $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n .
- Initialisation : on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = 1,9u_0(1 - u_0) = 0,171 \leq \frac{1}{2}$. Ainsi, $\mathcal{P}_0$ est bien vérifié.
- Hérédité : Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}_n$ vrai. Comme f est croissante sur $[0 ; 1]$, obtient : $\mathcal{P}_n \implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\frac{1}{2})$.
Or, $f(0) = 0$, $f(u_n) = u_{n+1}$, $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(1) = 0,475 < \frac{1}{2}$, donc $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vrai.
- Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vrai pour $n = 0$ et héréditaire, donc, d'après l'axiome de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- b. (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$ est donc convergente d'après le théorème de convergence monotone.
- c. Les termes de la suite (u_n) sont dans $[0 ; 1]$ dans lequel f est continue. Donc la limite l de la suite est un point fixe de f dans cet intervalle.
On résout l'équation $x = 1,9x(1 - x)$ dans $[0 ; 1]$.
La suite est croissante et comme $u_0 > 0$, alors $l > 0$. On peut donc chercher $l \neq 0$.
L'équation est donc $1 = 1,9(1 - x)$ donne $x = \frac{9}{19} \approx 0,473$ à 0,01 près.