

DST n° 3 sur les suites récurrentes en Tale

EXERCICE 1

7 points

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

- Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.
- Résoudre dans l'intervalle $[0; 100]$ l'équation $f(x) = x$.
- Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
- (a) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100.$$

- (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2

(7 points)

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
(b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$.
En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
(c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
- Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
(a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
(c) Calculer la limite de la suite (T_n) .
(d) À l'aide de la calculatrice, résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel.

EXERCICE 3

(7 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x-1} (2x^2 - 5x + 4)$.

- Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (2x^2 - x - 1)e^{x-1}$.
- Justifier que f' est du signe du trinôme $T(x) = 2x^2 - x - 1$.
- Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$. On calculera les valeurs exactes des extremums (on ne s'occupera pas des limites en $l' \infty$).
- On admet que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

À l'aide des variations de f sur $\mathbb{R}$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 1

1. L'année 2022 est l'année $2021 + 1$, donc on doit calculer u_1 .

$$u_1 = 0,008u_0(200 - u_0) = 0,008 \times 40 \times 160 = 51,2.$$

L'estimation est donc de 51,2 oiseaux (arrondie à 51 animaux).

2. Résolvons $f(x) = x$.

$$f(x) = x \iff 0,008x(200 - x) = x$$

$$\iff 1,6x - 0,008x^2 = x$$

$$\iff 0,008x^2 - 0,6x = 0$$

$$\iff x(0,008x - 0,6) = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,008x - 0,6 = 0$$

$$\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} = 75$$

L'équation admet deux solutions dans $[0 ; 100]$: 0 et 75.

3. (a) Pour tout x entre 0 et 100, on a : $f(x) = -0,008x^2 + 1,6x$. C'est une fonction polynôme de degré 2, dont le coefficient dominant est négatif $(-0,008)$.

Le sommet de la parabole représentant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ a pour abscisse : $\frac{-1,6}{2 \times (-0,008)} = 100$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ serait donc croissante sur l'intervalle $] -\infty ; 100]$ et décroissante sur $[100 ; +\infty[$, donc f , qui est définie sur $[0 ; 100]$ est bien strictement croissante sur $[0 ; 100]$.

- (b) Pour tout entier naturel n , on pose P_n la propriété : « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ ».

— Initialisation : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$, donc on a bien $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 100$ donc la propriété P_0 est vraie.

— Hérédité : Soit n un entier naturel . On suppose P_n vraie.

$$P_n \implies 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

$$\implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100) \quad f \text{ est croissante sur } [0 ; 100]$$

$$\implies 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80 \quad \text{car } f(0) = 0; f(100) = 80$$

$$\implies 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 100$$

$$\implies P_{n+1}$$

Ainsi, la propriété est héréditaire.

— Conclusion : La propriété P_0 est vraie, et pour un naturel n quelconque, si P_n est vraie, P_{n+1} l'est aussi donc, d'après l'axiome du raisonnement par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}; \quad 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

On en déduit donc que la suite est bornée par 0 et 100, et qu'elle est croissante.

- (c) La suite est croissante et majorée par 100, donc elle converge vers une limite ℓ , qui est supérieure à $u_0 = 40$ et inférieure au majorant 100.

- (d) Puisque la suite est convergente et définie par récurrence et que la fonction de récurrence f est continue sur $[0 ; 100]$, intervalle contenant la limite ℓ , d'après le théorème du point fixe, ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$.

Comme on a établi que cette équation n'a que deux solutions dans $[0 ; 100]$, 0 et 75, et que l'on a établi que ℓ est comprise entre 40 et 100, il vient que $\ell = 75$.

La suite converge donc vers 75. Ainsi, à long terme la population d'oiseaux se rapprochera de 75 aussi près que l'on veut.

EXERCICE 2

On considère la suite (T_n) définie par : $T_0 = 180$ et $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$

1. (a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$.

Initialisation : $T_0 = 180 \geq 20$. L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, et supposons que $T_n \geq 0$. Montrons que $T_{n+1} \geq 20$.

$$T_n \geq 20 \iff 0,955 \times T_n \geq 0,955 \times 20 \iff 0,955T_n \geq 19,1$$

$$\iff 0,955T_n + 0,9 \geq 19,1 + 0,9 \iff 0,955T_n + 0,9 \geq 20. \text{ Donc } T_{n+1} \geq 20. \text{ L'hérédité est démontrée.}$$

Conclusion : La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après l'axiome de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$.

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n = 0,955 T_n + 0,9 - T_n = -0,045 T_n + 0,9 = -0,045 \left(T_n - \frac{0,9}{0,045} \right) \\ = -0,045(T_n - 20).$$

Or d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq 20$ donc $T_n - 20 \geq 0$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \leq 0$. La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante.

- (c) La suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite finie supérieure ou égale à 20.

2. On note $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$.

$$(a) \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = T_{n+1} - 20 = 0,955 \times T_n + 0,9 - 20 = 0,955 T_n - 19,1 = 0,955 \left(T_n - \frac{19,1}{0,955} \right) \\ = 0,955(T_n - 20) = 0,955 u_n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,955u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

$$(b) \forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n.$$

De plus $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = T_n - 20$ donc $T_n = u_n + 20 = 160 \times 0,955^n + 20$.

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0 \text{ car } 0,955 \in]-1; 1[. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20.$$

$$(d) T_n \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n + 20 \leq 120 \iff 160 \times 0,955^n \leq 120 - 20 \iff 160 \times 0,955^n \leq 100 \\ \iff 0,955^n \leq \frac{100}{160} \iff 0,955^n \leq \frac{5}{8}.$$

Sachant que la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on obtient :

$$\ln(0,955^n) \leq \ln\left(\frac{5}{8}\right) \iff n \times \ln(0,955) \leq \ln\left(\frac{5}{8}\right). \text{ Or } \ln(0,955) < 0 \text{ donc,}$$

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)}. \text{ À la calculatrice, } \frac{\ln\left(\frac{5}{8}\right)}{\ln(0,955)} \approx 10,21 \text{ donc } n \geq 11.$$

3. (a) Lorsque le gâteau est sorti du four, il va céder son énergie (sa chaleur) à l'extérieur (environnement ambiant). Sa masse étant très faible par rapport à celle de l'extérieur, il va diminuer sa température pour atteindre celle de l'extérieur, soit 20° C.

- (b) La fonction Python décrite est un algorithme de seuil : on cherche à partir de quand, la température devient inférieure ou égale au seuil fixé (ici l'argument de la fonction *seuil()* qui est x). La valeur renvoyée sera le premier entier vérifiant $T_n \leq x$.

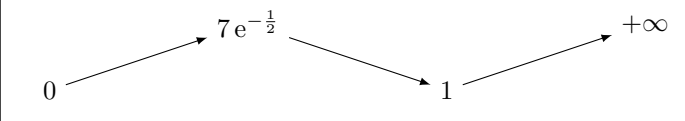
temp(120) fournira le premier nombre entier n tel que $T_n \leq 120$, soit d'après la question précédente, $n = 11$. Dans le contexte de l'exercice, il faudra donc 11 minutes avant que la température du plat soit inférieure ou égale à 120° C

EXERCICE 3

1.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 1 \cdot e^{x-1} (2x^2 - 5x + 4) + e^{x-1} (4x - 5) \\
 &= e^{x-1} (2x^2 - 5x + 4 + 4x - 5) \\
 f'(x) &= e^{x-1} (2x^2 - x - 1)
 \end{aligned}$$

2. Comme $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, f' est du signe du trinôme T sur $\mathbb{R}$.3. Le trinôme T se factorise en $(x - 1)(x + \frac{1}{2})$. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				

4. Les variations de f sur $\mathbb{R}$ montrent que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est 1. Par conséquent, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$.