

🌀 Deux exercices sur les suites récurrentes 🌀

EXERCICE 1 7 points au bac

suites, fonctions

Soit k un nombre réel. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes. On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

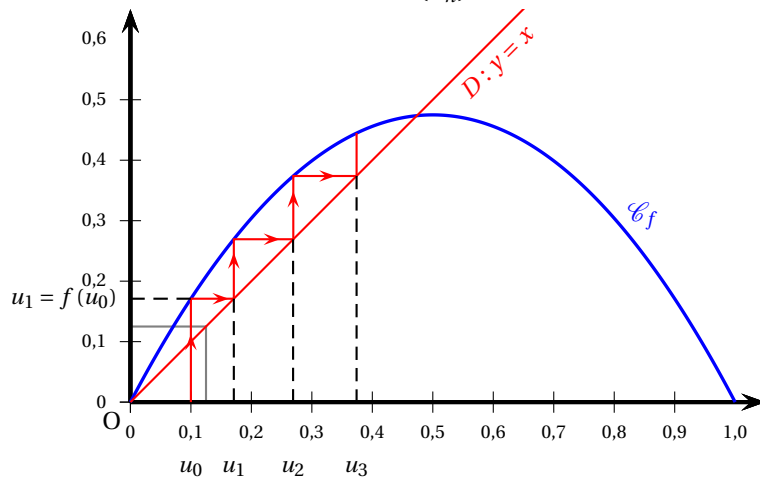
Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - a. Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - b. En déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 1]$.
2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3.
 - a. En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$
 - b. En déduire que la suite (u_n) converge.
 - c. Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python algo (p) où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p):
        u = 1/2*u*(1 - u)
        n = n+1
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p, la boucle while ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande algo (p) de renvoyer une valeur.

EXERCICE 1

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n)$$

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$; on a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

a. On étudie les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.

$$f'(x) = 1,9(1 - x) + 1,9x \times (-1) = 1,9 - 1,9x - 1,9x = 1,9(1 - 2x)$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x) = 1,9(1 - 2x)$	+	0	-

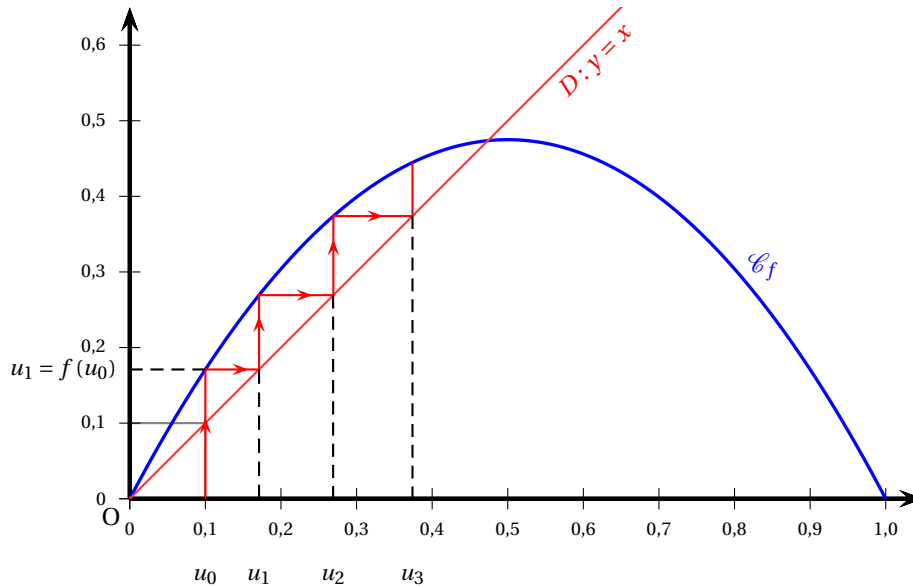
$$f(0) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475 \text{ et } f(1) = 0$$

On établit le tableau des variations de f sur $[0; 1]$:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	0,475	0

b. On peut en déduire que si $x \in [0; 1]$ alors $f(x) \in [0; 0,475]$ donc $f(x) \in [0; 1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.



La suite (u_n) semble croissante et semble converger vers l'abscisse du point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et D .

3. a. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

- **Initialisation**

Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 0,1$ et $u_{n+1} = 1,9u_0(1 - u_0) = 1,9 \times 0,1 \times 0,9 = 0,171$; donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$.

La propriété est vraie au rang 0.

- **Hérédité**

On suppose la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$. C'est l'hypothèse de récurrence.

La fonction f est croissante sur $[0; \frac{1}{2}]$ donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\frac{1}{2})$.

$$f(0) = 0, f(u_n) = u_{n+1}, f(u_{n+1}) = u_{n+2} \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,475 \leq \frac{1}{2}$$

On en déduit que : $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \frac{1}{2}$.

Donc la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• **Conclusion**

La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire; donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

On a donc démontré que, pour tout entier naturel n , on a : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$.

b. De la propriété précédente, on tire :

- pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$ donc la suite (u_n) est croissante;
- pour tout n , $u_n \leq \frac{1}{2}$ donc la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, elle est convergente.

c. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) .

Comme pour tout n , $f(u_n) = u_{n+1}$ et que la fonction f est continue, la limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

On résout l'équation $f(x) = x$:

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff 1,9x(1-x) = x \iff 1,9x(1-x) - x = 0 \\ &\iff x(1,9 - 1,9x - 1) = 0 \iff x(0,9 - 1,9x) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } 0,9 - 1,9x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{0,9}{1,9} \end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante donc $\ell \geq u_0$ soit $\ell \geq 0,1$.

La seule solution possible est donc $\ell = \frac{0,9}{1,9} = \frac{9}{19} \approx 0,474$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$, donc, pour tout n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. $0 < \frac{1}{2} < 1$ donc la suite géométrique (v_n) définie pour tout n par $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente vers 0.

Pour tout n , $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (u_n) est convergente et a pour limite 0.

2. On considère la fonction Python `algo(p)` où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :
    u = 1/4
    n = 0
    while u > 10**(-p):
        u = 1/2*u*(1 - u)
        n = n+1
    return(n)
```

La boucle s'arrête quand u est inférieur ou égal à $10^{-(p)}$, c'est-à-dire pour la première valeur de n vérifiant $u_n \leq 10^{-p}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, il y a une première valeur n_0 à partir de laquelle $u_n \leq 10^{-p}$ pour tout $n \geq n_0$. La boucle `while` ne tourne donc pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo(p)` de renvoyer une valeur.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3 e^x.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. Calculer u_1 puis u_2 .

On donnera les valeurs exactes, puis les valeurs approchées à 10^{-3} .

- b. On considère la fonction `fonc`, écrite en langage Python ci-dessous.

On rappelle qu'en langage Python,
« `i in range (n)` » signifie que
`i` varie de 0 à `n - 1`.

```
def fonc (n):
    u = - 1
    for i in range(n) :
        u=u**3*exp(u)
    return u
```

Déterminer, sans justifier, la valeur renvoyée par `fonc (2)` arrondie à 10^{-3} .

2. a. Démontrer que, pour tout x réel, on a $f'(x) = x^2 e^x (x + 3)$.

- b. Justifier que le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$ est celui représenté ci-dessous :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0	$-27 e^{-3}$	$+\infty$

- c. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n , on a :

$$-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0.$$

- d. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

- e. On note ℓ la limite de la suite (u_n) .

On rappelle que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Déterminer ℓ . (Pour cela, on admettra que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ possède une seule solution dans $\mathbb{R}$ et que celle-ci est strictement supérieure à $\frac{1}{2}$).

$$f(x) = x^3 e^x.$$

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

- a. • $u_1 = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$;
 • $u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3} \times (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034$.
- b. On a $\text{fonc}(2) = u_2 \approx -0,034$.

2. a. En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

b.

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0	$-27e^{-3}$	$+\infty$

• Quel que soit le réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3 + x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations;

$3 + x < 0 \iff x < -3$: sur $]-\infty; -3[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty; -3[$;

$3 + x > 0 \iff x > -3$: sur $] -3; +\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $] -3; +\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

- On a $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$;
- De $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a par produit de limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

c. *Initialisation* : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$, on a bien : $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

On a vu que sur l'intervalle $] -3; +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $] -1; +\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, ou encore :

$$u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$$

et comme $u_1 \approx -0,338$, $-1 \leq u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$$-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0.$$

La relation est vraie au rang $n + 1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n , $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n + 1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante;
- la suite (u_n) est majorée par 0;

La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ , avec $\ell \leq 0$.

e. On résout dans $] -1; 0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$$f(x) = x \iff x^3 e^x = x \iff x^3 e^x - x = 0 \iff x(x^2 e^x - 1) = 0 \iff x = 0, \text{ car on admet que l'équation } x^2 e^x - 1 = 0 \text{ n'a pas de solution dans l'intervalle }] -1; 0[.$$

Conclusion $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.