

Énoncé

Consigne pour les calculs de limites :

- Si vous repérez des limites usuelles, invoquez-les pour les calculs.
- Une limite peut très bien se calculer sans calculs « savants » ; uniquement en utilisant l'algèbre des limites.
- Si une forme est indéterminée, il faut l'indiquer et ensuite procéder aux calculs adéquats (Souvent, la mise en facteur du terme « prépondérant »).
- Si vous utilisez l'un des théorèmes de comparaison, l'indiquer clairement.
- Si vous utilisez une règle de comparaison, l'indiquer clairement.
- Les limites sont par croissant de difficulté, traitez donc les questions dans l'ordre.
- Écrire une rédaction simple détaillant votre démarche.

1. $a_n = -3n^2 + 2n^3 - 3n + 6$

2. $b_n = \frac{-3n^2 + 2n + 9}{5n^2 + n + 1}$

3. $c_n = 5n^3 - 2\sqrt{n}$

4. $d_n = 5^n - 3^n$ (Expliquez pourquoi la forme est indéterminée, puis, mettre le terme le plus pertinent en facteur).

5. $e_n = \frac{\cos(n^3)}{n + 1}$

6. $f_n = \frac{e^n - n^2 + n}{e^n + 3n - 1}$

Correction

1. $a_n = -3n^2 + 2n^3 - 3n + 6$

Réponse : a_n est un polynôme en n , il se comporte à l'infini comme le monôme $2n^3$; d'où :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty}.$$

2. $b_n = \frac{-3n^2 + 2n + 9}{5n^2 + n + 1}$

Réponse : b_n est une fraction rationnelle en n , elle se comporte à l'infini comme le rapport simplifié des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur :

$$\frac{-3n^2}{5n^2} = -\frac{3}{5}; \text{ d'où :}$$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\frac{3}{5}}.$$

3. $c_n = 5^n - 3^n$

Réponse : Les termes (5^n) et (3^n) sont géométriques de raison 3 et 5; tous deux > 1 ; ainsi, ces termes tendent vers $+\infty$ et c_n est une forme indéterminée pour sa limite. Le terme dominant est (5^n) par lequel on factorise :

$$c_n = 5^n \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right).$$

Or, $-1 < \frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ et le deuxième facteur dans c_n tend vers 1 par différence.

Finalement, par produit, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = +\infty}$.

4. $d_n = 5n^3 - 2\sqrt{n}$

Réponse : Les deux termes de la différence tendent vers $+\infty$ (Limites usuelles), d_n est donc une forme indéterminée pour sa limite. On factorise par le terme dominant $5n^3$; on obtient :

$$d_n = 5n^3 \left(1 - \frac{2\sqrt{n}}{5n^3}\right) = 5n^3 \left(1 - \frac{2}{5n^2\sqrt{n}}\right).$$

Les termes n^2 et $\sqrt{n}$ tendent tous deux vers $+\infty$, alors, le produit $n^2\sqrt{n}$ tend vers $+\infty$.

Par inverse, $\frac{1}{n^2\sqrt{n}}$ tend vers 0.

Dans l'égalité $d_n = 5n^3 \left(1 - \frac{2}{5n^2\sqrt{n}}\right)$, le deuxième facteur tend vers 1 par différence et finalement, par produit :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty}.$$

5. $e_n = \frac{\cos(n^3)}{n+1}$.

Réponse : On sait que la fonction $\cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par 1 et -1 . Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, n+1 > 0$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{n+1} \leq \frac{\cos(n^3)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

Comme les deux termes extrêmes de l'inégalité tendent vers 0 (Limite usuelle), d'après le Théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n = 0}.$$

6. $f_n = \frac{e^n - n^2 + n}{e^n - 1}$ Réponse :

$$f_n = \frac{e^n \left(1 - \frac{n^2}{e^n} + \frac{n}{e^n}\right)}{e^n \left(1 - \frac{1}{e^n}\right)}$$

$$f_n = \frac{1 - \frac{n^2}{e^n} + \frac{n}{e^n}}{1 - \frac{1}{e^n}}$$

Les termes $\frac{n}{e^n}$ et $\frac{n^2}{e^n}$ tendent vers 0 par croissances comparées de n ou n^2 et e^n . Par somme, le numérateur et le dénominateur tendent vers 1. Enfin, par rapport,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 1}.$$

7. $g_n = \cos\left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 1}\right)$

Réponse : La suite sous la fonction $\cos$ est une fraction rationnelle en n , sa limite en $+\infty$ est celle du rapport simplifié des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. Soit ici : $\frac{2n^2}{3n^2} = \frac{2}{3}$.

On en déduit :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos\left(\frac{2n^2 + 1}{3n^2 + 1}\right) &= \lim_{X \rightarrow \frac{2}{3}} \cos(X) \text{ (par composition)} \\ &= \cos\left(\frac{2}{3}\right) \text{ (car la fonction } \cos \text{ est dérivable sur } \mathbb{R})\end{aligned}$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \cos\left(\frac{2}{3}\right).$