

☞ Contrôle sur la récurrence en terminale ☞

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$.

1. Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
2. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
3. Donner une expression de $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
4. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{n+1}$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}$.

1. Comment pourrait-on montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$?
On admet maintenant que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.
On définit la suite (v_n) par $v_n = \frac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En calculant $v_{n+1} - v_n$, montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$. Calculer le premier terme de (v_n) .
3. Exprimer v_n en fonction de n .
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n .

Exercice bonus

On considère la suite (u) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2n+2} \times (u_n^2 + 2n + 1)$.

Montrer que (u) est arithmétique; en déduire u_n à l'aide de n .

Correction

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$.

$$1. \quad u_1 = \frac{u_0}{1+u_0} = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{u_1}{1+u_1} = \frac{1}{3} \text{ et } u_3 = \frac{u_2}{1+u_2} = \frac{1}{4}.$$

2. On montre par récurrence que pour tout entier naturel, la propriété $P_n : u_n > 0$ est vraie.

Initialisation :

P_0 s'énonce : $u_0 > 0$, c'est-à-dire : $1 > 0$ qui est vraie.

Hérédité :

Pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on suppose P_n vraie (Hypothèse (HR)).

On sait que $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Comme $u_n > 0$ par (HR), les termes de cette fraction sont strictement positifs, par suite, $u_{n+1} > 0$; c'est P_{n+1} .

Conclusion :

P_n est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, alors, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$3. \quad u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{-u_n^2}{1+u_n} < 0 \text{ car } u_n \text{ est strictement positif d'après la question précédente. La suite } (u_n) \text{ est donc décroissante.}$$

$$4. \quad \text{On montre par récurrence que pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a } u_n = \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Soit } P_n \text{ la propriété : } u_n = \frac{1}{n+1}.$$

• Initialisation :

Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{0+1} = 1$ donc P_0 est vraie.

• Hérédité :

Supposons que P_n est vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on a donc $u_n = \frac{1}{n+1}$.

$$\text{On a alors } u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+1+1}{n+1}} = \frac{1}{1+(n+1)} : \text{ la relation est vraie au rang } (n+1).$$

P_{n+1} est donc vraie.

Comme P_0 est vraie, et que pour $n \in \mathbb{N}$, P_n vraie entraîne P_{n+1} vraie, d'après le principe de récurrence on peut dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie.

Exercice 2

1. Vu la construction de la suite, cela se fera par récurrence. L'initialisation est évidente et l'hérédité immédiate, car si $u_n > 0$, les termes de la fraction $\frac{u_n}{2u_n+1}$ le sont aussi et par conséquent $u_{n+1} > 0$.

2.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{\frac{u_n}{2u_n+1}} \\ &= \frac{2u_n+1}{u_n} \\ &= 2\frac{u_n}{u_n} + \frac{1}{u_n} \\ &= 2 + v_n \end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n = 2$ qui est indépendant de n . (v_n) est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $v_0 = \frac{1}{u_0} = 1$.

3. D'après le cours, $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 1 + 2n$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}, v_n \neq 0$, on en déduit que $u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{1 + 2n}$.

Exercice bonus

On considère la suite (u) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2n+2} \times (u_n^2 + 2n + 1)$.

Montrer que (u) est arithmétique; en déduire u_n à l'aide de n .

On calcule $u_1 = 5$ puis $u_2 = 7$. Il semble ainsi que la suite (u) soit arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $r = 2$.

On note P_n la propriété : « $u_n = 2n + 3$ ». Montrons que P_n est vraie pour tout n de $\mathbb{N}$ par récurrence sur n .

Remarquons que P_{n+1} s'énonce $u_{n+1} = 2n + 5$.

Initialisation

P_0 s'énonce $u_0 = 3$ ce qui est vrai vu la valeur donnée de u_0 .

Hérédité

On suppose P_n pour un certain $n \in \mathbb{N}$ (Hypothèse H_n), alors : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{1}{2n+2} (u_n^2 + 2n + 1) \text{ Par définition de } u_n \\ &= \frac{1}{2n+2} ((2n+3)^2 + 2n + 1) \text{ Par } H_n \\ &= \frac{1}{2n+2} (4n^2 + 14n + 10) \text{ Après développement et réduction} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} (2(2n^2 + 7n + 5)) \\ &= \frac{1}{n+1} (2n^2 + 7n + 5) \text{ Après simplification par 2} \\ &= \frac{1}{n+1} (n+1)(2n+5) \text{ Après factorisation du trinôme} \\ u_{n+1} &= 2n + 5 \text{ Après simplification par } n+1 \end{aligned}$$

C'est P_{n+1} ; ainsi, P_n est héréditaire.

Conclusion

P_n est vraie pour $n = 0$ et héréditaire, alors, d'après l'axiome de récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2n + 3$