

Correction de la feuille d'exercices sur la convexité

I

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3x+1)e^{2x+1} - 1$.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$; $f = ue^v - 1$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x+1 \\ v(x) = 2x+1 \end{cases}$.

$$f' = u'e^x + u(e^v)' = u'e^v + uv'e^v \text{ avec } u'(x) = 3 \text{ et } v'(x) = 2.$$

$$\text{Alors : } f'(x) = 3e^{2x+1} + 2(3x+1)e^{2x+1} = (3+2(3x+1))e^{2x+1} = \boxed{(6x+5)e^{2x+1}}$$

2. $f'(x) = 0$ pour $x = -\frac{5}{6}$ et est du signe de $6x+5$, donc $f'(x) \geq 0$ sur $\left[-\frac{5}{6}; 1\right]$. On en déduit le tableau de variation sur $\left[-\frac{5}{6}; 1\right]$:

x	$-\frac{5}{6}$	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\approx -1,77$	≈ 79

$f(x)$ passe d'une valeur négative à une valeur positive, en étant croissante, donc il existe une unique valeur α dans l'intervalle $\left[-\frac{5}{6}; 1\right]$ telle que $f(\alpha) = 0$.

À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx -0,16$.

3. On en déduit le signe de $f(x)$ sur $\left[-\frac{5}{6}; 1\right]$.

x	$-\frac{5}{6}$	α	1
$f(x)$	-	0	+

$$f''(x) = 6e^{2x+1} + 2(6x+5)e^{x+1} = (12x+16)e^{2x+1} = \boxed{4(3x+4)e^{2x+1}}.$$

$f''(x)$ s'annule en $-\frac{4}{3}$ et change de signe en $-\frac{4}{3}$.

$f''(x) \leq 0$ pour $x \leq -\frac{4}{3}$ et $f''(x) \geq 0$ pour $x \geq -\frac{4}{3}$.

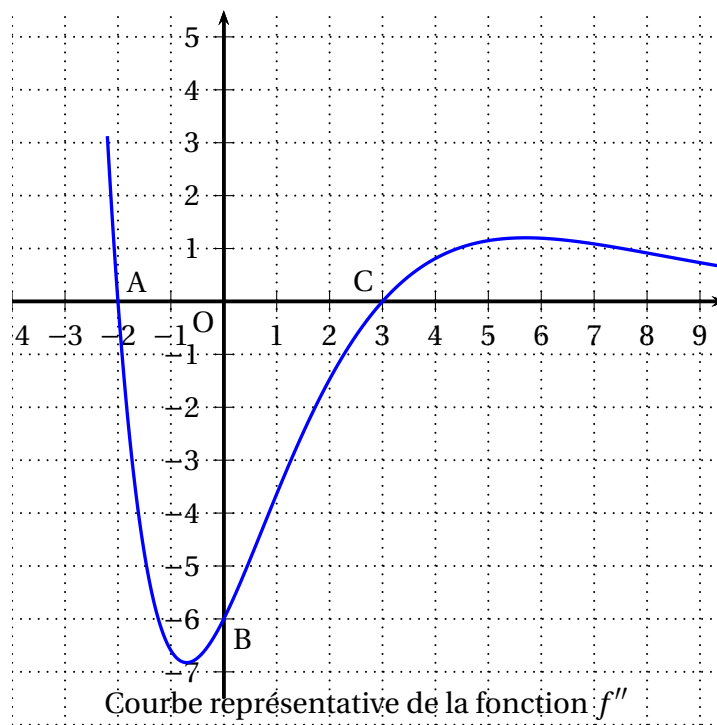
x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f	concave		convexe

$\mathcal{C}_f$ a un point d'inflexion de $-\frac{4}{3}$; ses coordonnées sont $\left(-\frac{4}{3}; -3e^{-\frac{5}{3}} - 1\right)$

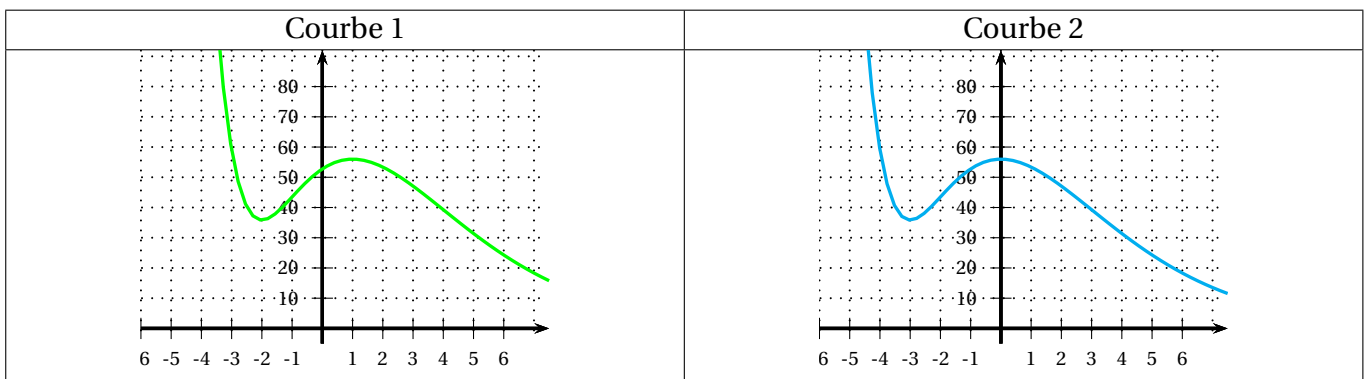
II Bac ES Métropole septembre 2014

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , dans un repère orthonormé.

Les points suivants appartiennent à la courbe : A(-2; 0); B(0; -6) et C(3; 0).



- La courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion si cette courbe traverse sa tangente, autrement dit si la dérivée seconde de f s'annule et change de signe.
D'après sa courbe représentative, la fonction f'' s'annule et change de signe en $x = -2$ et $x = 3$; donc la courbe représentant la fonction f admet deux points d'inflexion, aux points d'abscisses -2 et 3 .
- Sur l'intervalle $[-2; 3]$, la courbe représentant la fonction f'' est située en dessous de l'axe des abscisses, donc $f'' \leq 0$. Cela veut dire que, sur cet intervalle, la fonction dérivée première f' est décroissante, et donc que la fonction f est concave.
- On donne les deux courbes :



La courbe 1 représente une fonction qui admet en $x = -2$ un minimum; au point d'abscisse -2 , la courbe ne traverse pas sa tangente, donc le point d'abscisse -2 n'est pas un point d'inflexion. Donc la courbe 1 ne représente pas la fonction f .

La fonction f est représentée par la courbe 2.