

Variables aléatoires discrètes

Table des matières

I	Variable aléatoire	2
I.1	Notion de variable aléatoire discrète ; rappels	2
I.2	Loi d'une variable aléatoire	2
I.3	Espérance d'une variable aléatoire	2
I.4	Variance et écart-type d'une variable aléatoire	2
I.5	Transformation affine d'une variable aléatoire	3
II	Couples de variables aléatoires	3
II.1	Définition	3
II.2	Indépendance de deux variables aléatoires	4
II.3	Somme de variables aléatoires	5
III	Lois fondamentales	5
III.1	Loi de Bernoulli	5
III.2	Loi binomiale	5
IV	Théorème de concentration	6
IV.1	Inégalité de Markov	6
IV.2	Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	6
V	Loi des grands nombres	7
V.1	Estimation de la moyenne	7
V.2	Inégalité de concentration	7
V.3	Loi des grands nombres	8

I Variable aléatoire

I.1 Notion de variable aléatoire discrète ; rappels

Définition 1

Une grandeur numérique X prenant, lors d'une expérience aléatoire, des valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ avec des probabilités $p_1, p_2, \dots, p_n$ est une **variable aléatoire discrète**.

I.2 Loi d'une variable aléatoire

Définition 2

La **loi de probabilité** de la variable aléatoire X est la fonction qui a chaque valeur associe sa probabilité.

Remarque 1

En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées. La loi de probabilité est présentée sous la forme du tableau ci-dessous :

Valeurs de $X : x_i$	x_1	x_2	x_3	...	x_n	Total
Probabilité : $p(X = x_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n	1

I.3 Espérance d'une variable aléatoire

Définition 3

Soit X une variable aléatoire discrète, on appelle **espérance** de la variable aléatoire X le réel noté $E(X)$ qui vaut :

$$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

Remarque 2

Ce nombre important en probabilités représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X .

I.4 Variance et écart-type d'une variable aléatoire

Définition 4

Soit X une variable aléatoire discrète d'espérance $E(X)$.

► On appelle **variance** de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :

$$V(X) = E([X - E(X)]^2).$$

Ainsi,

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i [x_i - E(X)]^2 ; \text{ c'est-à-dire :}$$

$$V(X) = p_1[x_1 - E(X)]^2 + p_2[x_2 - E(X)]^2 + \dots + p_n[x_n - E(X)]^2$$

► On appelle **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$ ou σ_X défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarque 3

Si la variance est nulle, cela signifie que la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne est nulle et donc que la variable aléatoire est une constante.

Le théorème suivant permet un calcul plus facile de la variance :

Théorème 1 (De König-Huygens)

$$V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \dots + p_nx_n^2 - [E(X)]^2 = \sum_{i=1}^n p_ix_i^2 - [E(X)]^2 = E(X^2) - E^2(X).$$

Propriété 1

- ♦ La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X sont des nombres positifs.
- ♦ L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- ♦ Si X est exprimé dans une certaine unité, σ_X l'est dans la même unité.

I.5 Transformation affine d'une variable aléatoire

On montre les résultats suivants :

Propriété 2

Soit X une variable aléatoire discrète admettant une espérance et une variance, alors pour tous $a; b \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire $aX + b$ admet une espérance, une variance et un écart-type définis par :

- ♦ $E(aX + b) = aE(X) + b$.
- ♦ $V(aX + b) = a^2V(X)$.
- ♦ $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

II Couples de variables aléatoires

II.1 Définition

Certaines situations sont naturellement décrites par la donnée d'un couple de variables aléatoires. Par exemple, en météorologie, on peut s'intéresser au couple formé par la donnée de la température (T) et de la pression (P) atmosphériques. On est ainsi amené à étudier les deux paramètres simultanément, donc à regarder le couple $(T; P)$, qui est un **couple de variables aléatoires**.

Exemple 1

On considère dans le plan les points de coordonnées entières situés dans la zone B , définie par

$$B = \{(x; y) \text{ tel que } x; y \in \mathbb{N} \text{ et } 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3\}.$$

On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir l'un de ces points au hasard (tous les choix de points dans B étant équiprobables). On définit la variable aléatoire discrète Z qui est formée du couple de coordonnées du point choisi.

→ Détermination de la loi de Z :

Valeurs de Z	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)
Probabilités	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- La variable aléatoire Z est appelée couple des variables aléatoires X et Y .
On peut présenter sa loi de manière à faire apparaître les rôles joués par X et Y plus clairement :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

- on peut aussi déterminer les lois de X et de Y à partir de celle de Z :
Par exemple,

$$\begin{aligned} P(Y = 1) &= P((X = 1) \text{ et } (Y = 1)) + P((X = 2) \text{ et } (Y = 1)) \\ &= P(Z = (1; 1)) + P(Z = (2; 1)) \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De manière plus rapide, en faisant les additions en colonne, on obtient la loi de Y :

y_i	1	2	3
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

- en faisant les additions en ligne, on obtient la loi de X :

x_i	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

- ces deux lois sont appelées lois marginales du couple $(X; Y)$.
De façon synthétique, on peut représenter toutes ces données dans un même tableau :

$X \backslash Y$	1	2	3	$P(X = x_i)$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
$P(Y = y_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

II.2 Indépendance de deux variables aléatoires

Définition 5

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes de valeurs respectives $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, et $(y_1; y_2; \dots; y_p)$.
Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si pour tous i et j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$:

$$P(X = x_i; Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j).$$

Exemple 2

On lance deux dés équilibrés à six faces (un rouge, et un bleu). On appelle X le numéro de la face du dé bleu, et Y le numéro de la face du dé rouge. On appelle S la somme des faces obtenues.

- Les variables X et Y sont indépendantes.
- Les variables X et S ne sont pas indépendantes.
- Les variables Y et S ne sont pas indépendantes

II.3 Somme de variables aléatoires

Propriété 3

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y admettant une espérance, alors

- ♦ $X + Y$ admet l'espérance $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- ♦ $X - Y$ admet l'espérance $E(X - Y) = E(X) - E(Y)$.

Et dans le cas où X et Y sont indépendantes :

- ♦ $X + Y$ admet la variance $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
- ♦ $X - Y$ admet la variance $V(X - Y) = V(X) + V(Y)$.

III Lois fondamentales

III.1 Loi de Bernoulli

Définition 6

Une **expérience de Bernoulli** est une expérience qui n'a que deux issues possibles, l'une appelée « succès » qui a pour probabilité p , l'autre appelée « échec » qui a pour probabilité $q = 1 - p$.

Définir une **loi de Bernoulli de paramètre p** , c'est associer une loi de probabilité discrète à cette expérience aléatoire en faisant correspondre la valeur 1 à l'apparition d'un succès et 0 à celle d'un échec.

x_i	1	0
$p(X = x_i)$	p	$1 - p$

Propriété 4

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors :

- ♦ L'espérance de X vaut $E(X) = p$.
- ♦ La variance de X vaut $V(X) = pq$.

III.2 Loi binomiale

Définition 7

La **Loi binomiale de paramètres n et p** , notée $\mathcal{B}(n; p)$ est la loi de probabilité du nombre de succès dans la répétition de n expériences de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes.

Elle est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times q^{n-k}, \quad \forall \quad 0 \leq k \leq n.$$

Propriété 5

Soit X une variable aléatoire suivant une loi Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors :

- ♦ L'espérance de X vaut $E(X) = np$.
- ♦ La variance de X vaut $V(X) = npq$.

IV Théorème de concentration

IV.1 Inégalité de Markov

Propriété 6

Soit $a > 0$ un réel et X une variable aléatoire réelle positive ou nulle, alors, on a l'**inégalité de Markov** :

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Exemple 3

Majorer la probabilité $P(X \geq 1)$ d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 0,5$.

Exemple 4

Un phénomène naturel se produit, au hasard semble-t-il, en moyenne tous les 75 ans.

Majorer la probabilité qu'il se produise dans plus de 300 ans ?

Que peut-on dire de la probabilité qu'il se produise dans moins de 300 ans ?

Exemple 5

Une usine produit en moyenne 100 pièces par semaine. Que peut-on dire de la probabilité qu'une semaine elle en produise le double ?

Exemple 6

Montrer que, pour une variable aléatoire positive X et un entier $k > 0$ quelconque, on a $P(X \geq kE(X)) \leq \frac{1}{k}$.

En déduire la loi : "moins de 10% des salariés gagnent plus de 10 fois le salaire moyen".

Exemple 7

La température moyenne sur une île est de 25 degrés.

1. Majorer la probabilité que la température soit supérieure à 40 degrés un jour donné.
2. Minorer la probabilité que la température soit inférieure à 30 degrés un jour donné.

IV.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Propriété 7

Pour X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et pour tout réel $a > 0$, on a l'**inégalité de Bienaymé-Tchebychev**

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

Exemple 8

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

1. Calculer l'espérance et la variance de X .
2. Calculer $P(|X - E(X)| \geq 2)$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $a = 2$ et comparer avec le résultat précédent.

x_i	1	4	10
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

Exemple 9

Dans un grand magasin, on a relevé que le temps d'attente moyen des clients est de 12 minutes. La probabilité qu'un client attende entre 9 et 15 minutes est de 0,55.

Que peut-on dire de l'écart type du temps d'attente ?

V Loi des grands nombres

V.1 Estimation de la moyenne

On considère n variables aléatoires indépendantes deux à deux et suivant la même loi de probabilité que X .

On note la somme $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ et la moyenne $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

Propriété 8

1. $E(S_n) = nE(X)$ et $V(S_n) = nV(X)$ donc $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$.
2. $E(M_n) = E(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$ donc $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Exemple 10

Un appareil de mesure permet de réaliser des mesures avec une certaine précision.

Plus précisément, les mesures données par cet appareil peuvent être modélisée par une variable aléatoire X dont l'espérance est la valeur exacte $E(X) = m$ et l'écart type $\sigma(X) = 1$.

On suppose les mesures réalisées avec cet appareil indépendantes les unes des autres.

1. On réalise n mesures. Que peut-on dire de l'espérance de la moyenne de ces mesures ?
2. On sait que la probabilité de l'événement $M_n \in [m - 2\sigma; m + 2\sigma]$ est d'environ 95%.
 - (a) Quelle est la précision de la mesure avec 10 mesures ?
 - (b) Combien faut-il faire de mesures pour que la moyenne de celles-ci donne la valeur exacte avec une précision d'au moins 10^{-2} ?

Répéter un grand nombre de fois une mesure, et utiliser la moyenne des résultats obtenus donne tout simplement une estimation de la valeur recherchée.

En augmentant le nombre de mesures, on réduit l'**incertitude** sur la valeur trouvée.

La **loi des grands nombres** permet aussi de préciser cela.

V.2 Inégalité de concentration

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, et M_n la variable aléatoire moyenne d'un échantillon de taille n de X . On a alors, pour tout réel $a > 0$, $P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2}$

Cette inégalité s'appelle **inégalité de concentration**.

Exemple 11

On lance n fois successivement une pièce équilibrée. À chaque lancer, on note X la variable aléatoire égale à 0 si on obtient face et 1 si on obtient pile, alors $E(X) = 1/2$ et $V(X) = 1/4$. Pour tout $a > 0$, on a alors :

$$P(|M_n - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{na^2} \iff P\left(|M_n - \frac{1}{2}| \geq a\right) \leq \frac{1}{4na^2}$$

Par exemple, pour $a = 0,1$ et $n = 100$, $P(|M_n - \frac{1}{2}| \geq 0,1) \leq \frac{1}{4}$; en d'autres termes, sur $n = 100$ lancers, la probabilité que la proportion de pile obtenue s'écarte de plus d'un dixième de $1/2$, donc d'avoir moins de 40 ou plus de 60 pile, est inférieure à $1/4$.

V.3 Loi des grands nombres

On se place dans le cas d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ et X une variable aléatoire associée à cette expérience. $\mathcal{E}$ est réalisée n fois de façon indépendante. Un échantillon (X_n) de la variable X est une suite de variables où X_i prend la valeur prise par X lors de la i ème réalisation de $\mathcal{E}$. Les X_i suivent la même loi que X (même espérance et même variance que X).

En passant à la limite $n \rightarrow +\infty$ dans l'inégalité de concentration, comme une probabilité est positive et grâce au théorème des gendarmes, on obtient

Propriété 10

Loi faible des grands nombres

Soit (X_n) un échantillon d'une variable aléatoire X et sa moyenne $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, alors,
pour tout réel $a > 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq a) = 0$

Cette loi des grands nombres est largement utilisée en pratique. Elle nous dit qu'on peut estimer la probabilité d'un événement aléatoire à partir de la moyenne d'un (grand) nombre de réalisations.

*En théorie ce **grand** nombre signifie **la limite** lorsque le nombre de réalisations tend vers l'**infini**.*

*En pratique, on prend un (grand) nombre fini. Comment préciser si un nombre n est **grand** ?*

*Cela dépend du contexte et de la précision souhaitée, et cela est alors donné par l'**inégalité de concentration** qui est un résultat plus précis.*