

# FONCTIONS CIRCULAIRES

## Table des matières

|                                                                |          |
|----------------------------------------------------------------|----------|
| <b>I Le radian</b>                                             | <b>1</b> |
| <b>II Cercle trigonométrique</b>                               | <b>2</b> |
| <b>III Angles orientés</b>                                     | <b>2</b> |
| III.1 Mesure d'un arc ou d'angle orienté de vecteurs . . . . . | 2        |
| III.2 Mesure principale . . . . .                              | 3        |
| <b>IV Fonctions sinus et cosinus</b>                           | <b>3</b> |
| IV.1 Définitions . . . . .                                     | 3        |
| IV.2 Valeurs remarquables . . . . .                            | 4        |
| IV.3 Période et parité . . . . .                               | 4        |
| IV.4 Variations et courbe représentative . . . . .             | 4        |
| IV.4.1 Fonction sinus . . . . .                                | 5        |
| IV.4.2 Fonction cosinus . . . . .                              | 5        |
| <b>V Équations trigonométriques</b>                            | <b>6</b> |
| <b>VI Équations trigonométriques</b>                           | <b>7</b> |

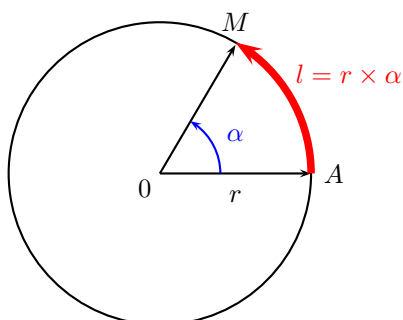
## I Le radian

### Définition 1

Le radian est, comme le degré ou le grade, une unité de mesure d'angles définie de la façon suivante :

Si  $A$  et  $M$  sont deux points d'un cercle de centre  $O$  de rayon  $r$ ,  $l$  désigne la longueur de l'arc  $\widehat{AM}$

$\Rightarrow$  La mesure en radians de l'angle  $\widehat{AOM}$  est la longueur de l'arc  $\widehat{AM}$   $\alpha = \frac{l}{r}$



### Remarque 1

- Le cas particulier  $r = 1$  est intéressant car alors  $l = \alpha$ . Dans ce cas, la mesure en radians de l'angle  $\widehat{AOM}$  est égale à la longueur de l'arc géométrique  $\widehat{AM}$
- Il y a proportionnalité entre la mesure en degrés et la mesure en radians :  
360 degrés =  $2\pi$  radians ou encore 180 degrés =  $\pi$  radians

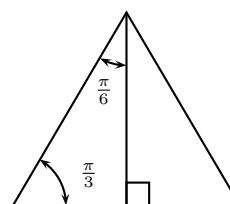
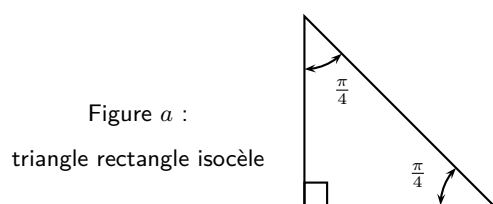
### Exemple 1

On obtient le tableau de conversions suivant :

| Angle             | plein  | plat  | droit           | fig.b           | fig.a           | fig.b           |
|-------------------|--------|-------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| Mesure en degrés  | 360    | 180   | 90              | 60              | 45              | 30              |
| Mesure en radians | $2\pi$ | $\pi$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{6}$ |

**Exemple 2**

Certains angles remarquables sont présents dans des figures usuelles :



## II Cercle trigonométrique

**Définition 2**

- Un cercle orienté est un cercle sur lequel on distingue les deux sens de parcours : le sens direct ou indirect
- Le cercle trigonométrique est le cercle de rayon 1 orienté de telle sorte que le direct est celui du sens inverse des aiguilles d'une montre

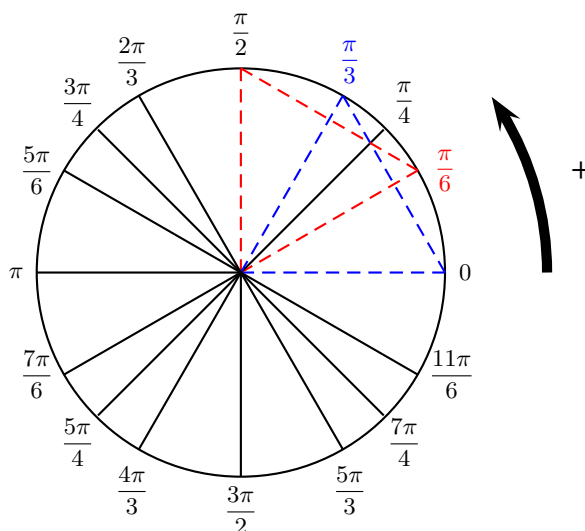
**Remarque 2**

On peut donner aux sens plusieurs dénominations :

- Sens direct : sens positif, sens trigonométrique, sens inverse des aiguilles d'une montre.
- Sens indirect : sens négatif, sens horaire.

**Exemple 3**

Placer les principales mesures en radian sur le cercle trigonométrique en prenant 4cm pour une unité



### III Angles orientés

#### III.1 Mesure d'un arc ou d'angle orienté de vecteurs

( $\mathcal{C}$ ) est le cercle trigonométrique de centre  $O$ ,  $A$  et  $M$  sont deux points de ( $\mathcal{C}$ )

##### Définition 3

Une mesure, en radians, de l'arc orienté  $\widehat{AM}$  ou de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$  est la longueur de chemin parcouru pour aller de  $A$  à  $M$  dans le sens direct

##### Propriété 1

Si  $\alpha$  est une mesure en radians de l'arc orienté  $\widehat{AM}$  ou de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ , alors toutes les mesures en radians de cet arc sont de la forme  $\alpha + 2k\pi$  où  $k$  est un nombre entier relatif

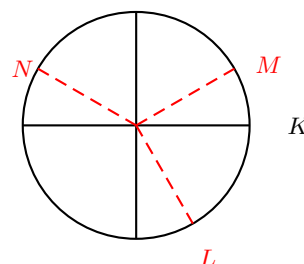
##### Remarque 3

Le " $k$ " détermine en fait un nombre de tours que l'on affectue sans le sens direct si  $k$  est positif, et dans le sens indirect si  $k$  est négatif

##### Exemple 4

Placez sur le cercle trigonométrique les quatre points  $K, L, M, N$  tels que :

- $\frac{5\pi}{3} - 2\pi$  est une mesure de  $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OL})$
- $\frac{7\pi}{6} - 3\pi$  est une mesure de  $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{OM})$
- $\frac{7\pi}{6} + 2\pi - \frac{\pi}{3}$  est une mesure de  $(\overrightarrow{OK}, \overrightarrow{ON})$



#### III.2 Mesure principale

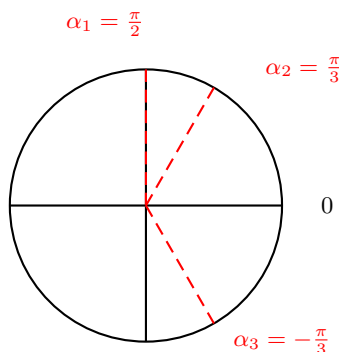
##### Définition 4

On appelle mesure principale, en radians, son unique mesure appartenant à l'intervalle  $[-\pi; \pi]$

##### Exemple 5

Donner les mesures principales des angles suivants en les plaçant sur le cercle trigonométrique :

- $\alpha_1 = \frac{21\pi}{2}$
- $\alpha_2 = \frac{13\pi}{3}$
- $\alpha_3 = \frac{-13\pi}{6}$



## IV Fonctions sinus et cosinus

### IV.1 Définitions

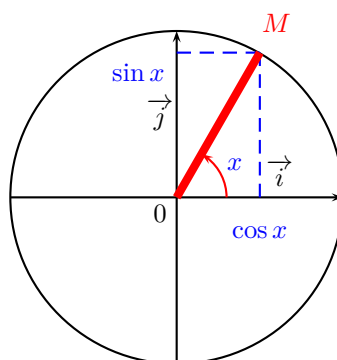
#### Définition 5

Soit  $x$  un réel quelconque

Il lui correspond un unique point  $M$  de  $(\mathcal{C})$  tel que  $x$  soit une mesure en radians de  $(\widehat{OA, OM})$

- Le cosinus de  $x$ , noté  $\cos x$ , est l'abscisse de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- Le sinus de  $x$ , noté  $\sin x$ , est l'ordonnée de  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$\cos x$  et  $\sin x$  sont donc respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point  $M$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
On note :  $M(\cos x; \sin x)$



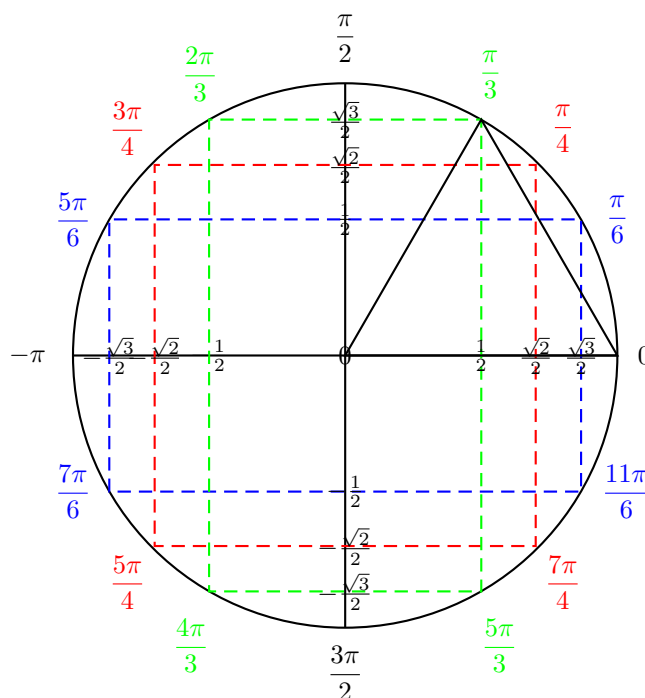
#### Propriété 2

Pour tout nombre réel  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\blacklozenge \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\blacklozenge -1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin x \leq 1$$

### IV.2 Valeurs remarquables



D'après ce cercle trigonométrique, on peut déterminer quelques valeurs utiles :

| $x$      | 0 | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | 0     |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | -1    |

### IV.3 Période et parité

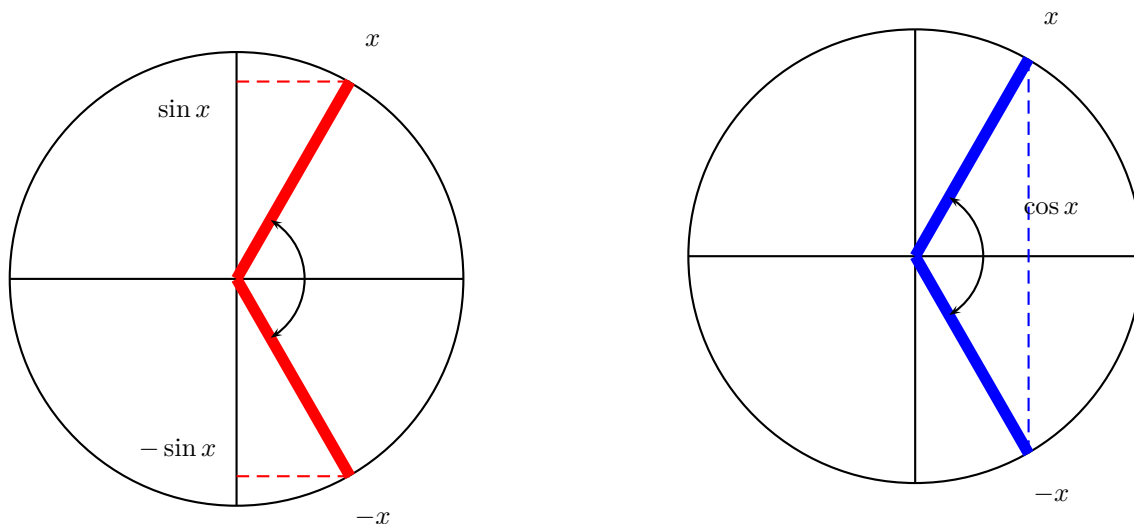
D'après la construction du cosinus et du sinus sur le cercle trigonométrique, on en déduit que :

$$\bullet \begin{cases} \cos(x + 2\pi) = \cos x \\ \sin(x + 2\pi) = \sin x \end{cases}$$

Ce qui signifie que les fonctions sinus et cosinus sont  $2\pi$ -périodiques, c'est à dire qu'elle se répètent de manière identique tous les  $2\pi$

$$\bullet \begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

Ce qui signifie que la fonction cosinus est paire (elle admet une symétrie d'axe l'axe des ordonnées), et que la fonction sinus est impaire (elle admet 0 comme centre de symétrie).



### IV.4 Variations et courbe représentative

Les fonctions sinus et cosinus étant  $2\pi$ -périodiques, on les étudie sur un intervalle de période  $2\pi$ . Ces fonctions étant aussi paire ou impaire, on peut encore restreindre l'intervalle à  $[0 ; \pi]$

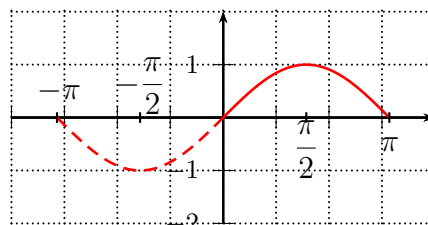
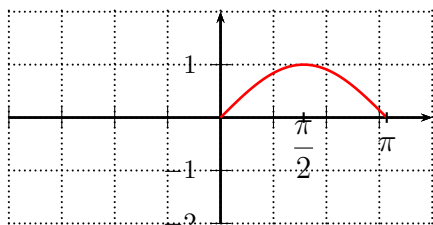
On obtient les tableaux de variations par lecture du cercle trigonométrique :

## IV.4.1 Fonction sinus

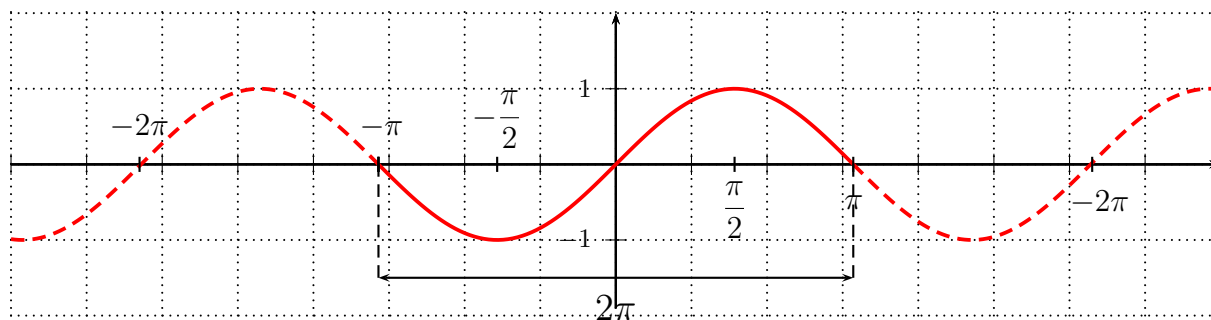
| $x$       | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|-----------|---|-----------------|-------|
| $\sin(x)$ | 0 | 1               | 0     |

Le tableau de variations sur l'intervalle  $[0; \pi]$  de la fonction sinus est :

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , puis par symétrie centrale, sur  $[-\pi; \pi]$



puis par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction sinus qui s'appelle une **sinusoïde**



En utilisant les règles de fonctions dérivées des fonctions composées :

**Propriété 3**

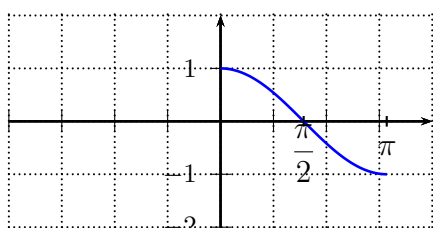
La fonction  $S : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(ax + b)$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}, C'(x) = a \cos(ax + b)$

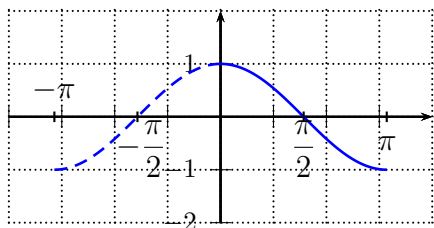
## IV.4.2 Fonction cosinus

| $x$      | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|----------|---|-----------------|-------|
| $\cos x$ | 1 | 0               | -1    |

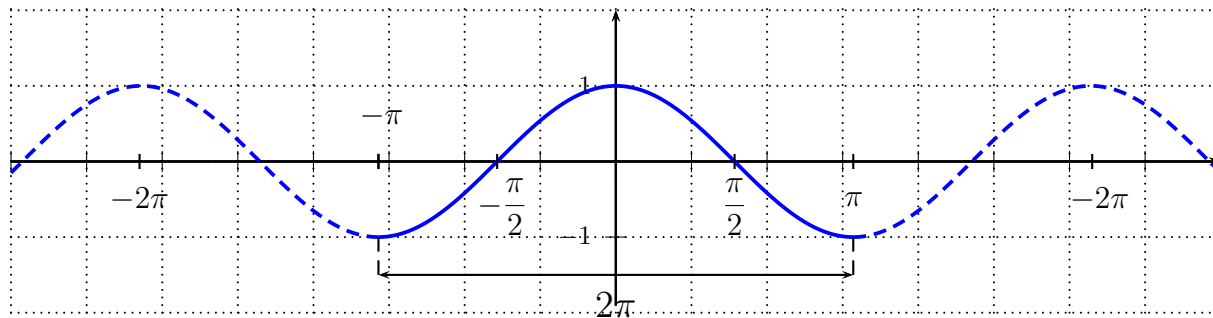
Le tableau de variations sur l'intervalle  $[0; \pi]$  de la fonction cosinus est :

On en déduit sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  sur l'intervalle  $[0; \pi]$ , puis par réflexion par rapport à l'axe des ordonnées, sur  $[-\pi; \pi]$





par translation, on obtient la courbe représentative de la fonction cosinus qui s'appelle une **sinusoïde** :



Comme pour la fonction sin :

#### Propriété 4

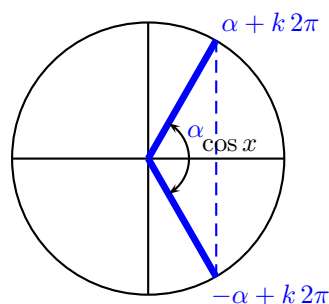
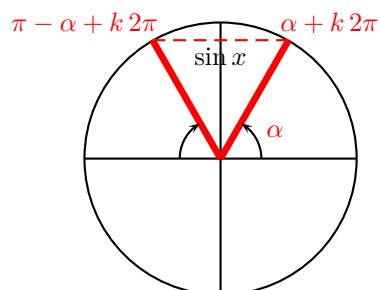
La fonction  $C : x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(ax + b)$  est dérivable et  $\forall x \in \mathbb{R}, S'(x) = -a \sin(ax + b)$

## V Équations trigonométriques

#### Propriété 5

Soit  $\alpha$  un réel fixé, alors l'équation :

- ♦  $\sin x = \sin \alpha$  a pour solutions  $x = \alpha + 2k\pi$  et  $x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- ♦  $\cos x = \cos \alpha$  a pour solutions  $x = \alpha + 2k\pi$  et  $x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



#### Exemple 6

Résoudre les équations suivantes :

$$\rightarrow \cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \cos(x) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\rightarrow \cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\rightarrow \sin(x) = \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\rightarrow \sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$\bullet S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$\bullet S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right\}$$

$$\bullet S = \left\{ -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$\bullet S = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$\bullet S = \left\{ -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

$$\bullet S = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$$

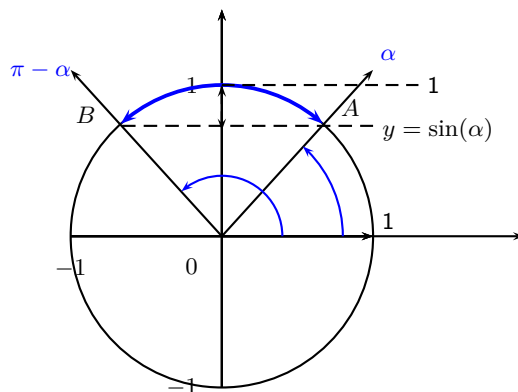
## VI Équations trigonométriques

Les inéquations trigonométriques qui sont un peu délicates à traiter seront vues en classe avec des exemples. Le plus simple est de s'appuyer sur le cercle trigonométrique pour déterminer les solutions.

### Exemple 7

Résoudre sur  $I = ]-\pi ; \pi]$  l'inéquation :  $\sin(x) \geq \sin(\alpha)$  où  $\alpha \in ]0 ; \frac{\pi}{2}[$ .

On commence par un dessin :



En observant le dessin, les points du cercle d'ordonnées  $\geq \sin(\alpha)$  sont les points sur de l'arc  $\widehat{AB}$ ; ainsi, on trouve  $x \in [\alpha ; \pi - \alpha]$ .  
On a aussi :  $\sin(x) \leq \sin(\alpha) \Leftrightarrow x \in [-\pi ; \alpha] \cup [\pi - \alpha ; \pi]$ .