

Compléments et précisions sur les inéquations trigonométriques

Inéquations du type $\sin x > \sin a$ $\sin x < \sin a$.

Prenons un réel "a" tel que $a \in]-\pi/2 ; \pi/2[$; alors $\pi - a$ est l'unique réel de $]\pi/2 ; 3\pi/2[$ de même sinus que "a".

L'examen du cercle trigonométrique montre facilement que :

- $\sin x > \sin a \Leftrightarrow x \in]a ; \pi - a[$ à 2π près ; c'est-à-dire que les solutions de l'inéquation $\sin x > \sin a$ sont les réels des intervalles de la forme $]a + 2k\pi ; \pi - a + 2k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x < \sin a \Leftrightarrow x \in]\pi - a ; a + 2\pi[$ à 2π près ; c'est-à-dire que les solutions de l'inéquation $\sin x < \sin a$ sont les réels des intervalles de la forme $]\pi - a + 2k\pi ; a + 2\pi + 2k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Les deux intervalles solutions précédents permettent de se "débarasser" du symbole "sin". D'autre part, ils permettent de mettre en évidence des solutions avec des contraintes du type : solutions dans $[0 ; 2\pi[$.

Si à la place de x on a une fonction en x, les équivalences permettent d'isoler x.

Attention ! les formules précédentes sont données pour $a \in]-\pi/2 ; \pi/2[$. Si ce n'est pas le cas, commencer par trouver un tel "a".

Inéquations du type $\cos x > \cos a$ ou $\cos x < \cos a$.

On résout cette fois une inéquation impliquant cos a. On prend $a \in]0 ; \pi[$. Alors -a est l'unique réel de $]-\pi ; 0[$ de même cosinus que a.

L'examen du cercle trigonométrique montre facilement que :

- $\cos x > \cos a \Leftrightarrow]-a ; a[$ à 2π près ; c'est-à-dire que les solutions de l'inéquation $\cos x > \cos a$ sont les réels des intervalles de la forme $]-a + 2k\pi ; a + 2k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x < \cos a \Leftrightarrow x \in]a ; -a + 2\pi[$ à 2π près ; c'est-à-dire que les solutions de l'inéquation $\cos x < \cos a$ sont les réels des intervalles de la forme $]a + 2k\pi ; -a + 2\pi + 2k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Les remarques concernant "sin" s'appliquent pour "cos".

Exemple 1:

- $\cos x < -\sqrt{2}/2 \Leftrightarrow \cos x < \cos(3\pi/4)$ (avec $3\pi/4 \in]0 ; \pi[$) $\Leftrightarrow x \in [3\pi/4 + 2k\pi ; -3\pi/4 + 2\pi + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$,
 $\Leftrightarrow x \in [3\pi/4 + 2k\pi ; 5\pi/4 + 2k\pi]$ où $k \in \mathbb{Z}$; ce sont les solutions dans Ψ .
- Les solutions sur $[0 ; 2\pi[$ sont les réels de l'intervalle $[3\pi/4 ; 5\pi/4]$.
- Les solutions sur $]-\pi ; \pi]$ sont les réels de l'intervalle $]-\pi ; \pi/4] \cup [3\pi/4 ; \pi]$.

Exemple 2 :

Résoudre l'inéquation $\cos(\pi - 3x) < \cos(\pi/6)$. On applique ce qui précède.

On vérifie que $\pi/6 \in]0 ; \pi/2[$.

$\cos(\pi - 3x) < \cos(\pi/6) \Leftrightarrow \pi - 3x \in [\pi/6 + 2k\pi ; -\pi/6 + 2\pi + 2k\pi] \Leftrightarrow x \in [-5\pi/18 + 2k\pi/3 ; 5\pi/18 + 2k\pi/3]$; ce sont les solutions dans $\mathbb{R}$.

Sur le cercle trigonométrique, on représente les points solutions en prenant :

$k = 0$, on trouve $[-5\pi/18 ; 5\pi/18]$,

$k = 1$, on trouve $[7\pi/18 ; 17\pi/18]$,

$k = 2$ on trouve $[19\pi/18 ; 29\pi/18]$

Les solutions sur $[0 ; 2\pi[$ sont les réels de $[0 ; 5\pi/18] \cup [7\pi/18 ; 17\pi/18] \cup [19\pi/18 ; 29\pi/18] \cup [31\pi/18 ; 2\pi]$.