

Intégration

TERMINALE GÉNÉRALE, SPÉCIALITÉ MATHS

Table des matières

I	Aire sous une courbe : Intégrale d'une fonction continue positive	2
II	Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque	3
1)	Intégrale d'une fonction continue négative	3
2)	Intégrale d'une fonction de signe quelconque	3
III	Propriétés de l'intégrale	3
1)	Linéarité	3
2)	Relation de Chasles	4
3)	Positivité	4
4)	Ordre et intégrale	4
5)	Moyenne d'une fonction	4
6)	Complément : Théorème des bornes atteintes sur un segment	4
7)	Inégalités de la moyenne	4
IV	Intégrales et primitives	5
V	Intégration par parties : cette section est hors programme	8

I Aire sous une courbe : Intégrale d'une fonction continue positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On cherche à déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .

L'unité d'aire est donnée par le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$: l'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$.

Plus précisément, le domaine $\mathcal{D}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $a \leq x \leq b$, et $0 \leq y \leq f(x)$.

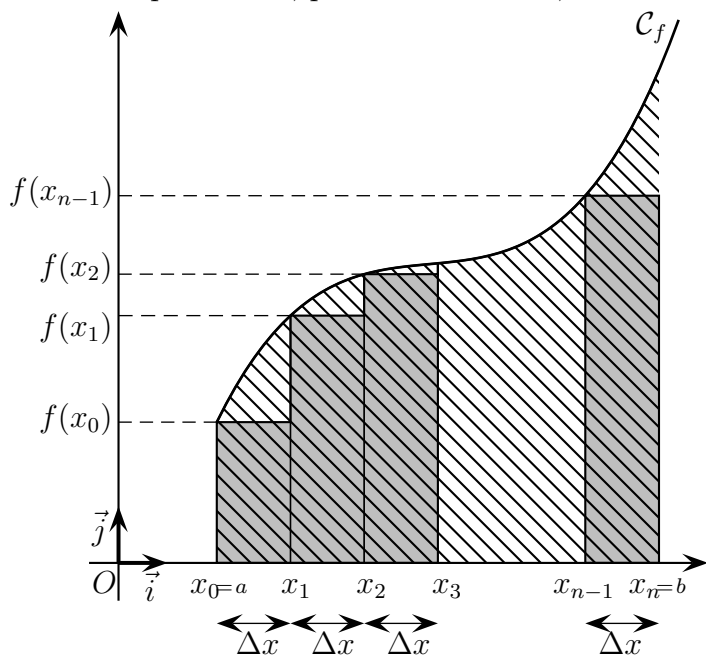
Cette aire s'appelle **l'intégrale de la fonction f de a à b** ; on la note $\int_a^b f(x)dx$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

On découpe l'intervalle $[a; b]$ en n intervalles de longueurs $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$[x_0; x_1] ; [x_1; x_2] ; [x_2; x_3] ; \dots ; [x_{n-1}; x_n]$$

avec $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = x_1 + \Delta x$, ... La suite (x_p) des abscisses est une suite arithmétique de raison Δx . En particulier, pour tout entier k , la $k^{\text{ème}}$ abscisse est $x_k = x_0 + k\Delta x$.



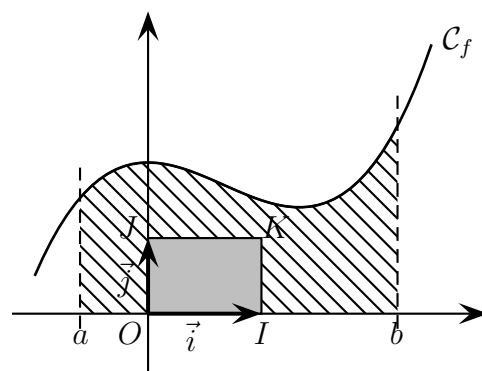
$$\begin{aligned} s_n &= f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x \end{aligned}$$

On montre alors (voir plus tard dans le cours) que (s_n) est convergente, avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \int_a^b f(x) dx$$

Remarque 1 : La notation $\int_a^b f(x) dx$ (introduite par Leibniz, et/ou Newton, au XVII^e siècle) s'explique à partir des calculs d'aire précédents, à la limite où $\Delta x \rightarrow 0$, et donc $n \rightarrow +\infty$, notée finalement dx (largeur infinitésimale), et le symbole $\sum$ se transformant en $\int$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$



Remarque 2 : La variable x est dite muette. La lettre qui la désigne n'a pas d'importance :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(\alpha) d\alpha = \dots$$

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes : $I = \int_0^1 x dx$, $J = \int_1^3 (2t + 1) dt$, et $K = \int_{-2}^3 |x| dx$.

Exercice 2 Calculer l'intégrale $I = \int_0^4 E(x) dx$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x .

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f(x) = 4x - 3$.
Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 1$, la fonction $F(t) = \int_1^t f(x) dx$.

II Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque

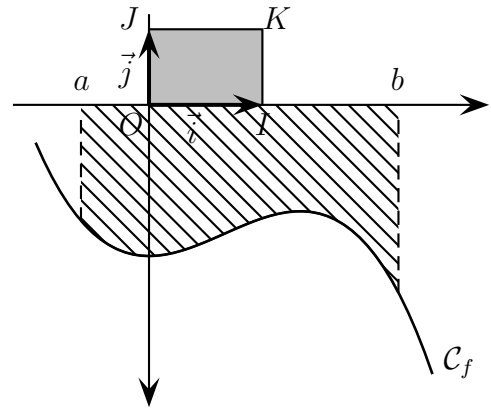
D'une manière plus générale, l'intégrale d'une fonction f continue sur un intervalle $[a; b]$ est l'aire **algébrique** du domaine compris entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

1) Intégrale d'une fonction continue négative

Soit f une fonction **continue et négative** sur un intervalle $[a; b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Dans ce cas, l'intégrale de f de a à b est l'opposé de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre l'axe des abscisses et $\mathcal{C}_f$:

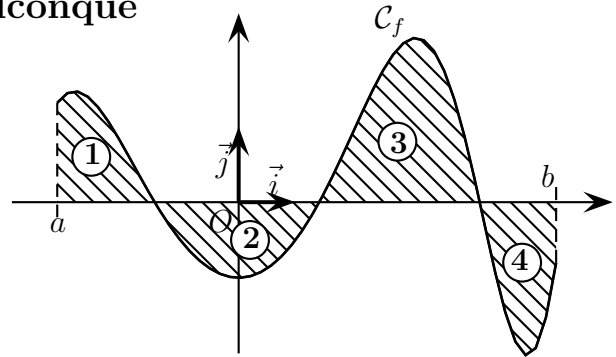
$$\int_a^b f(x) dx = -\text{aire}(\mathcal{D})$$



2) Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Pour une fonction f continue de signe quelconque sur un intervalle $[a; b]$, l'intégrale de f est la somme des aires algébriques des domaines sur lesquels f garde un signe constant.

$$\int_a^b f(x) dx = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3) - \text{aire}(\mathcal{D}_4)$$



On convient de plus que : $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

III Propriétés de l'intégrale

1) Linéarité

Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a; b]$ et tout réel λ ,

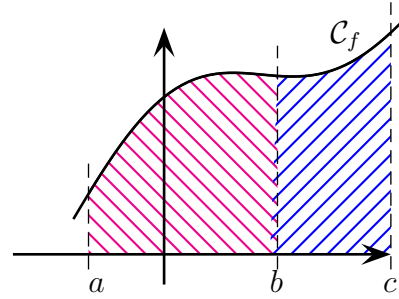
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

2) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur $[a; c]$,
et soit b un réel de $[a; c]$, alors

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$



3) Positivité

- Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$

4) Ordre et intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que, pour tout x de $[a; b]$,

$$f(x) \leq g(x), \text{ alors } \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

5) Moyenne d'une fonction

Définition Soit f continue sur $[a; b]$, avec $a < b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

6) Complément : Théorème des bornes atteintes sur un segment

Ce qui suit complète la définition précédente.

On montre que toute fonction continue sur un intervalle fermé et borné de la forme $[a; b]$ y est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe deux réels m et M tels que :

$\forall x \in [a; b], m \leq f(x) \leq M$; de plus, il existe x_0 et x_1 dans $[a; b]$ tels que $f(x_0) = m$ et $f(x_1) = M$.
Dit encore autrement, toute fonction continue sur un segment admet un maximum (M) et un minimum (m) sur ce segment.

7) Inégalités de la moyenne

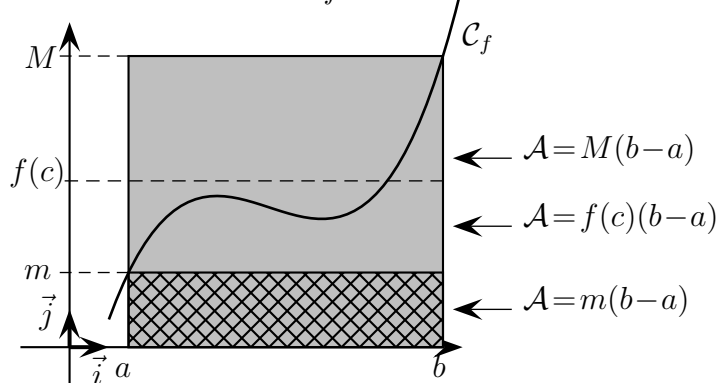
Soit f une fonction continue sur $[a; b]$, m et M son minimum et son maximum sur $[a; b]$ avec $a < b$.
Alors, pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

Comme $a < b$, en intégrant les membres de cette inégalité, on obtient :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \text{ et par suite : } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Comme m et M sont des images par f , d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a; b]$
tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$; c'est à dire tel que $f(c) \times (b-a) = \int_a^b f(x) dx$.

$(b-a)$ est la longueur du segment $[a; b]$. Il existe donc un rectangle de largeur $f(c)$ dont l'aire est égale à l'aire sous la courbe de f entre a et b .



Exercice 4

- Démontrer que pour tout réel t de $[0; 1]$, on a $\frac{t}{1+t^2} \leq t$.
- En déduire que $\int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 5 f est la fonction définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$.

- Étudier les variations de f sur $[1; 2]$.
- Démontrer que pour tout x de $[1; 2]$, $\frac{e^2}{4} \leq \frac{e^x}{x^2} \leq e$.
- En déduire un encadrement de $\int_1^2 \frac{e^x}{x^2} dx$.

Exercice 6 Soit f définie sur $[-3; 3]$ par $f(x) = E(x^2)$ où E désigne la fonction partie entière.

- Montrer que f est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0; 3]$.
- Calculer $\int_0^3 f(x) dx$. En déduire $\int_{-3}^3 f(x) dx$.

IV Intégrales et primitives

Théorème Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et $a \in I$.

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Démonstration: Soit x_0 un réel de I , on cherche à montrer que F est dérivable en x_0 et que $F'(x) = f(x)$.

On revient donc à la définition de la dérivée de F en x_0 : la limite du taux de variation $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}$.

Soit donc h un réel tel que $x_0+h \in I$. D'après la relation de Chasles :

$$F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_a^{x_0+h} f(t)dt + \int_{x_0}^a f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$$

Comme f est continue sur I , f est en particulier continue sur $[x_0; x_0+h]$, alors d'après le complément énoncé au point 6, il existe $c \in [x_0; x_0+h]$ tel que $f(c) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$.

Le réel c est fonction de h et comme $c \in [x_0; x_0+h]$, alors, vu la double inégalité $x_0 \leq c \leq x_0+h$, il est

clair que c tend vers x_0 quand h tend vers 0. Comme f est continue en $x_0 \in I$, alors : $\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x_0)$.

On vient de prouver que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ce qui signifie exactement que la fonction F est dérivable en x_0 , et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Ce raisonnement est valable pour tout $x_0 \in I$, et donc on a bien $F' = f$: F est **une primitive** de f .

On a de plus, $F(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$, et donc, F est **la primitive** de f s'annulant en a . □

Exercice 7 Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$.

Déterminer le sens de variation de F .

Propriété Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I , et F une primitive de f sur I . Alors,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

La quantité $F(b) - F(a)$ se note souvent $\left[F(x)\right]_a^b$, et ainsi

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$$

Démonstration: Soit $\alpha \in I$, et $F(x) = \int_\alpha^x f(t) dt$ la primitive de f qui s'annule en α .

On a alors, $\int_a^b f(t) dt = \int_a^\alpha f(t) dt + \int_\alpha^b f(t) dt = -\int_\alpha^a f(t) dt + \int_\alpha^b f(t) dt = -F(a) + F(b)$. □

Exercice 8 Déterminer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_0^1 x^2 dx$ $I_2 = \int_{-1}^3 (5 - 2x) dx$

$$I_3 = \int_0^1 e^{-2x} dx \quad I_4 = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 1} dx \quad I_5 = \int_0^1 x^2(x^3 - 1)^5 dx \quad I_6 = \int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 4)^2} dx \quad I_7 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Exercice 9 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$, et, pour un entier $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_1^n f(x) dx$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
Représenter sur ce graphique I_n .
2. Calculer I_n pour tout entier, puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice 10 Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

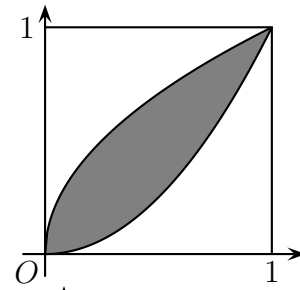
- a) $f : x \mapsto x^2$ sur $I = [-1; 1]$
- b) $f : x \mapsto x^3$ sur $I = [-1; 1]$
- c) $f : x \mapsto x(3x^2 - 1)^2$ sur $I = [-1; 2]$
- d) $f : x \mapsto \frac{3}{2x+1}$ sur $I = [0; 4]$
- e) $f : x \mapsto \frac{x^2}{(8 - x^3)^2}$ sur $I = [0; 1]$

Exercice 11

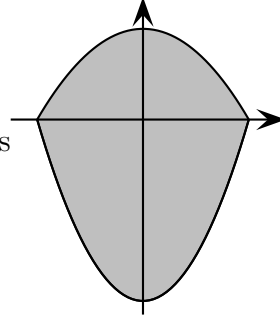
Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

(On pourra se rappeler que $\sqrt{x} = x^{1/2}$)

**Exercice 12**

Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes des fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 - 4$ et $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.



Exercice 13 Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

- a) $f(x) = (2 - x)(x - 1)$ sur $I = [-1; 0]$ b) $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1; 1]$.

Exercice 14 Vrai-Faux Pour chaque affirmation proposée, dire si elle est vraie ou fausse. Justifier.

Soit f une fonction continue et positive sur $[0; +\infty[$, et soit F et G les fonctions définies $[0; +\infty[$ par $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ et $G(x) = x \int_1^x f(t) dt$. Soit de plus Γ la courbe représentative de f dans un repère.

1. $G(0) = G(1)$
2. G est dérivable sur $[0; +\infty[$, et pour tout $x \in [0; +\infty[$, $G'(x) = F(x) + xf(x)$.
3. On ne peut pas prévoir le sens de variation de G avec les seules informations de l'énoncé.
4. L'aire de la surface délimitée par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et la courbe Γ se calcule par $F(2) + F(0)$.

Exercice 15 Étude d'une suite (D'après Bac)

On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = e^{-x^2}$ et on définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x) dx \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 1, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$$

1. a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $\frac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.
 b) En déduire que $\frac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.
2. Calculer u_1 .
3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n$.
 b) Étudier les variations de la suite (u_n) .
 En déduire que la suite (u_n) est convergente.
4. a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 16 D'après Bac

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{1+t} dt.$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. On définit la suite (I_n) , pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \int_1^n (t+1) e^{-t} dt.$

a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

b) En déduire que $J_n \leq I_n$.

c) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.

Exprimer alors I_n en fonction de n .

d) En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel.

e) Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

V Intégration par parties : cette section est hors programme

Théorème Soit u et v deux fonctions définies, dérivables et dont les dérivées sont continues sur un intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ou encore, dans une forme moins rigoureuse mais plus simple à mémoriser :

$$\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Démonstration: Les fonctions u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$.

De plus, les fonctions u , v , u' et v' étant continues, la dérivée du produit $(uv)' = u'v + uv'$ est aussi continue, et donc

$$\begin{aligned} \int_a^b (u(x)v(x))' dx &= \int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x)) dx \\ &= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx \end{aligned}$$

De plus, comme la fonction uv est une primitive de $(uv)'$, on a

$$\int_a^b (u(x)v(x))' dx = [u(x)v(x)]_a^b$$

et on obtient :

$$[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

d'où la formule d'intégration par parties en isolant dans cette relation une intégrale. □

Exercice 17 Calculer les intégrales suivantes :

$$\bullet I = \int_0^3 xe^x dx \quad \bullet J = \int_{-2}^2 4xe^{3x-1} dx \quad \bullet K = \int_{-1}^1 2x(8x+2)^2 dx \quad \bullet L = \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx \quad \bullet M = \int_0^1 x^2 e^x dx$$