

# Équations différentielles et primitives

## Table des matières

|       |                                                                            |   |
|-------|----------------------------------------------------------------------------|---|
| I     | Équation différentielle                                                    | 1 |
| II    | Équation différentielle $y' = f$                                           | 1 |
| II.1  | Primitive d'une fonction continue                                          | 1 |
| II.2  | Primitives des fonctions usuelles                                          | 3 |
| II.3  | Primitives et opérations :                                                 | 3 |
| III   | Équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ , avec $a \neq 0$ | 4 |
| III.1 | Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ , $a \neq 0$             | 4 |
| III.2 | Résolution de $y' = ay + b$ , $a \neq 0$                                   | 5 |
| III.3 | Résolution de $y' = ay + f$ , $a \neq 0$                                   | 6 |
| IV    | Deux exercices sur les équations différentielle                            | 6 |
| IV.1  | Énoncés                                                                    | 6 |
| IV.2  | Corrections                                                                | 7 |

## I Équation différentielle



### Définition

On appelle équation différentielle une équation à une inconnue dont l'inconnue est une **fonction** et faisant intervenir la fonction, sa dérivée et éventuellement les dérivées d'ordre deux, trois, etc.

### Exemples

- a)  $y' = y$ , équation différentielle dont la fonction exponentielle est une solution car  $\exp' = \exp$
- b) Équation du pendule simple : une masse est suspendue à un fil de longueur  $L$  à l'équilibre, donc verticalement.
- On écarte la masse de sa position d'équilibre et on note  $\theta$  l'angle formé avec la verticale.
- Cet angle dépend de  $t$  et vérifie l'équation différentielle  $\theta'' - \frac{g}{L} \sin \theta = 0$  (qu'on ne sait pas résoudre, si ce n'est de manière approchée!)

## II Équation différentielle $y' = f$

$f$  est une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

### II.1 Primitive d'une fonction continue



### Définition

Soit  $F$  une fonction définie sur  $I$ . On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  si  $F$  est dérivable sur  $I$  et  $F' = f$ .

On dit alors que  $F$  est une solution de l'équation différentielle  $y' = f$ , appelée équation différentielle, d'inconnue  $y$ .

### Exemples :

a Soit l'équation différentielle  $y' = x^2$ . (Remarque, on commet un abus de langage, car  $x^2$  est un nombre, pas une fonction).

Soit  $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ;  $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$  donc  $F$  est solution de l'équation différentielle  $y' = x^2$ .

b Soit l'équation différentielle  $y' = \frac{1}{x}$  sur  $]0; +\infty[$ ;

$F$  définie par  $F(x) = \ln x$  est solution de cette équation différentielle car  $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ .



### Théorème (admis)

| Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet des primitives sur cet intervalle.



### Théorème

| Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

### Démonstration.

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ .

- Soit  $F$  une primitive de  $f$  donc  $F' = f$ .

Soit  $k \in \mathbb{R}$  une constante.  $(F + k)' = F' + 0 = f$  donc  $F + k$  est aussi une primitive de  $f$ .

- Soient  $F$  et  $G$  deux primitives de  $f$  sur  $I$ .

Alors  $F' = f$  et  $G' = f$ .

$G - F$  est dérivable;  $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$  donc  $(G - F)' = 0$ .

$G - F$  est donc constant;  $G - F = k$  d'où  $G = F + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .



### Propriété

| On considère l'équation différentielle  $y' = f$ .

Soient  $x_0$  et  $y_0$  deux réels.

Il existe une unique solution de cette équation différentielle, donc une unique primitive  $F$  de  $f$ , telle que

$F(x_0) = y_0$

### Démonstration :

$f$  est continue, donc admet une primitive  $F$ . Les autres primitives de  $f$  sont de la forme  $F + k$ .

On doit avoir  $F(x_0) = y_0$  donc  $k = y_0 - F(x_0)$ ;  $k$  est donc unique et la primitive aussi.

**Exemple :** soit  $f(x) = e^{3x}$ .

Une primitive de  $f$  est  $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$  car  $F'(x) = 3e^{3x}$ .

Il y a une seule primitive  $G$  de  $f$  vérifiant  $G(0) = -1$ .

$G(x) = F(x) + k = \frac{1}{3}e^{3x} + k$ ;  $G(0) = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$  donc

$$G(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$$

## II.2 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants :

| Fonction                                                           | une primitive                    | validité                                                                     |
|--------------------------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $f(x) = a \in \mathbb{R}$                                          | $F(x) = ax$                      | $\mathbb{R}$                                                                 |
| $f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$                                  | $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$     | $\mathbb{R}$                                                                 |
| $f(x) = \frac{1}{x}$                                               | $F(x) = \ln(x)$                  | $]0; +\infty[$                                                               |
| $f(x) = \frac{1}{x^2}$                                             | $F(x) = -\frac{1}{x}$            | $\mathbb{R}^*$                                                               |
| $f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$                    | $F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$ | $\mathbb{R}^*$                                                               |
| $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$                                       | $F(x) = \sqrt{x}$                | $]0; +\infty[$                                                               |
| $f(x) = e^x$                                                       | $F(x) = e^x$                     | $\mathbb{R}$                                                                 |
| $f(x) = \cos x$                                                    | $F(x) = \sin x$                  | $\mathbb{R}$                                                                 |
| $f(x) = \sin x$                                                    | $F(x) = -\cos x$                 | $\mathbb{R}$                                                                 |
| <b>Hors-programme :</b> $f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $F(x) = \tan x$                  | $\left] (2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2} \right[ , k \in \mathbb{Z}$ |

## II.3 Primitives et opérations :

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions admettant des primitives respectives  $U$  et  $V$  sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction admettant une primitive  $G$  sur un intervalle  $J$  contenant l'intervalle  $u(I)$ .

On note  $u'$  la dérivée de  $u$ .

| Fonction                                                    | une primitive                 | validité                    |
|-------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| $f = \alpha u + \beta v ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$ | $F = \alpha U + \beta V$      | $I$                         |
| $f = u' \times g \circ u$                                   | $F = G \circ u$               | $I$                         |
| $f = u' u^n (n \in \mathbb{N}^*)$                           | $\frac{u^{n+1}}{n+1}$         | $I$                         |
| $f = \frac{u'}{u}$                                          | $\ln  u $                     | $u$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$               | $F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ | $u$ ne s'annule pas sur $I$ |
| $f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$                                  | $F = \sqrt{u}$                | $u > 0$ sur $I$             |
| $f = u' e^u$                                                | $F = e^u$                     |                             |
| $f = u' \cos(u)$                                            | $\sin(u)$                     | $I$                         |
| $f = u' \sin(u)$                                            | $-\cos(u)$                    | $I$                         |

Cela vient des formules de dérivation.

### Exemple :

Résoudre l'équation différentielle  $y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$  (E).

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ .

$f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  admet des primitives sur  $\mathbb{R}$ .

On remarque que  $f(x) = x \times \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ .

Posons  $u(x) = x^2 + 1$ ; alors  $u'(x) = 2x$ .

On voit que  $f = \frac{1}{2} u'(x) \times \frac{1}{u^2}$  dont une primitive est  $F = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u}\right)$ .

Par conséquent :  $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + 1} = \boxed{-\frac{1}{2(x^2 + 1)}}$

## III Équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$ , avec $a \neq 0$

### III.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ , $a \neq 0$



#### Définition

L'équation différentielle  $y' = ay$  qui s'écrit aussi  $y' - ay = 0$  où  $a$  et  $b$  sont des réels est appelée équation différentielle linéaire homogène de premier ordre à coefficients constants.



#### Propriété

Les solutions de l'équation différentielle (E)  $y' = ay$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $y(x) = ke^{ax}$ , où  $k$  est un réel quelconque.

Pour tous réels  $x_0$  et  $y_0$ , il existe une unique solution  $y$  telle que  $y(x_0) = y_0$

#### Démonstration.

- Soient  $k$  un réel et  $y$  la fonction définie par  $y = ke^{ax}$ .  
Alors  $y'(x) = k \times ae^{ax} = a \times y(x)$  donc  $y' = ay$ .  
 $y$  est bien une solution de cette équation (E)
- **Réciproquement :**  
Soit  $y$  une solution de (E) donc  $y' = ay$ .  
On considère la fonction  $g$  définie par  $g(x) = y(x)e^{-ax}$ .  
 $g$  est dérivable et  $g'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x) \times (-ae^{-ax}) = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$ .  
Pour tout  $x$ ,  $g' = 0$  donc  $g$  est une fonction constante.  
Il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $g = k$  donc  $g(x) = k$  pour tout  $x$ .  
Or  $g(x) = y(x)e^{-ax}$ , donc  $y(x)e^{-ax} = k$ .  
On en déduit :  $\boxed{y(x) = ke^{ax}}$ .

### **Propriété**

Soient  $y_1$  et  $y_2$  deux solutions de (E) et  $k$  un réel.  
Alors  $y_1 + y_2$  et  $ky_1$  sont aussi solutions de (E).

## III.2 Résolution de $y' = ay + b$ , $a \neq 0$

### **Définition**

L'équation différentielle (E) :  $y' = ay + b$  ou  $y' - ay = b$  est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

### **Propriété**

Les solutions de (E) :  $y' = ay + b$  ou  $y' - ay = b$  sont les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ .

**Remarque** : les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante aux solutions de l'équation homogène  $y' = ay$  associée.

**Démonstration** : Soit (E) l'équation différentielle  $y' = ay + b$  ( $\neq 0$ ).

- On commence par chercher une fonction constante  $\varphi$  solution de cette équation.  
 $\varphi(x) = k$ ;  $\varphi'(x) = 0$  donc  $\varphi$  est solution. de (E) si, et seulement si, pour tout  $x$ ,  $0 = a\varphi(x) + b \Leftrightarrow 0 = ak + b$   
donc  $k = -\frac{b}{a}$ .
- Soit  $y$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ .  
 $y$  est solution de (E) si, et seulement si,  $y' = ay + b$  donc, pour tout  $x$ ,  $y'(x) = ay(x) + b$ .  
 $y - \varphi$  est dérivable et  $(y - \varphi)' = y' - \varphi' = (ay + b) - (a\varphi + b) = ay + b - a\varphi - b = a(y - \varphi)$ .  
On en déduit que  $y - \varphi$  est solution de l'équation différentielle  $(E_0)$  :  $y' - ay = 0$ .  
D'après le paragraphe précédent, on obtient :  $(y - \varphi)(x) = ke^{ax}$  donc  $y(x) = ke^{ax} + \varphi(x)$ , c'est-à-dire :

$$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}.$$

- Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par  $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ,  $k \in \mathbb{R}$

Exemple : soit (E) :  $y' = 3y - 2$ .  
 $y' = ay + b$  avec  $a = 3$  et  $b = -2$ .

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions :  $y \mapsto y(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$ .

### III.3 Résolution de $y' = ay + f$ , $a \neq 0$



#### Définition

L'équation différentielle (E) :  $y' = ay + f$  ou  $y' - ay = f$  est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.



#### Propriété

Soit  $\varphi$  une solution particulière de (E).

Alors  $y$  est une solution de (E) si, et seulement si,  $y - \varphi$  est une solution de l'équation différentielle homogène associée  $y' = ay$ .

#### Exemple :

Soit l'équation différentielle  $2y' + 3y = 6x + 1$ .

On note  $\varphi$  une fonction affine qui est une solution particulière de (E).

À l'aide de  $\varphi$ , résoudre (E).

1. On pose  $\varphi(x) = mx + p$  (fonction affine).

$$\varphi \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow 2m + 3(mx + p) = 6x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 6 \\ 2m + p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = -1 \end{cases}.$$

On en déduit  $\varphi(x) = 2x - 1$ .

2. L'équation homogène associée est  $2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$ .

Les solutions sont  $x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Les solutions de l'équation (E) sont donc  $x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$

## IV Trois exercices sur les équations différentielle

### IV.1 Énoncés

1. On considère l'équation différentielle  $(E_1) : 2y' - y = 1$ . Déterminer la solution de  $(E_1)$  qui s'annule en 0.
2. On considère l'équation différentielle  $(E_2) : 2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2 - x$  est solution de  $(E_2)$ .
  - (b) En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_2)$
  - (c) Déterminer la solution de  $(E_2)$  qui s'annule en 0.
3. On considère l'équation différentielle  $(E_3) : y' + y = (3 - 2x)e^{-x}$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une solution de  $(E_3)$  de la forme  $y_p(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ .
  - (b) En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_3)$
  - (c) Déterminer la solution de  $(E_3)$  qui s'annule en 0.
  - (d) Question subsidiaire : Pourquoi n'a-t-on pas inséré de terme constant  $c$  dans le facteur  $ax^2 + bx$  de la solution particulière?

## IV.2 Corrections

1. On considère l'équation différentielle  $(E_1) : 2y' - y = 1$ . Déterminer la solution de  $(E_1)$  qui s'annule en 0.
  - On résout l'équation homogène :  $y' = \frac{1}{2}y$  dont les solutions sont les fonctions  $y = Ce^{\frac{1}{2}x}$  où  $C$  est un réel arbitraire.
  - On cherche une solution particulière sous la forme d'une fonction constante  $y_p = A \in \mathbb{R}$ .  
En substituant  $y_p$  dans  $(E_1)$ , on obtient :  $2 \times 0 - A = 1$  ; d'où  $A = -1$ .
  - Les solutions de  $(E_1)$  sont les fonctions  $y = Ce^{\frac{1}{2}x} - 1$  où  $C$  est un réel arbitraire.
  - $y_0(0) = 0 \Leftrightarrow C \times 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow C = 1$ . La fonction cherchée est  $y_0 = e^{\frac{1}{2}x} - 1$ .
2. On considère l'équation différentielle  $(E_2) : 2y' - 3y = 3x^2 - x - 2$ .
  - (a) Montrer que la fonction  $f : x \in \mathbb{R} \mapsto -x^2 - x$  est solution de  $(E_2)$ .  
 $2y' - 3y = 2(-2x - 1) - 3(-x^2 - x) = 3x^2 - x - 2$ .
  - (b) En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_2)$   
L'équation homogène associée a pour solution  $y_H = Ce^{\frac{3}{2}x}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .  
Les solutions sont les fonctions  $y = Ce^{\frac{3}{2}x} - x^2 - x$ , où  $C \in \mathbb{R}$ .
  - (c) Déterminer la solution de  $(E_2)$  qui s'annule en 0.  
On écrit que  $y_0(0) = 0 \Leftrightarrow C \times 1 - 0 = 0 \Leftrightarrow C = 0$ . la solution cherchée est  $y_0 = -x^2 - x$ .
3. On considère l'équation différentielle  $(E_3) : y' + y = (3 - 2x)e^{-x}$ .
  - (a) Montrer qu'il existe une solution de  $(E_3)$  de la forme  $y_p(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ .

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} : y'_p + y_p &= (3 - 2x)e^{-x} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : (2ax + b - ax^2 - bx)e^{-x} + (ax^2 + bx)e^{-x} = (3 - 2x)e^{-x} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} : 2ax + b = 3 - 2x \\ &\Leftrightarrow 2a = -2 \text{ et } b = 3 \\ &\Leftrightarrow a = -1 \text{ et } b = 3\end{aligned}$$

La fonction  $y_p = (-x^2 + 3x)e^{-x}$  est solution particulière de  $(E_3)$ .

- (b) En déduire les solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $(E_3)$ .  
L'équation homogène  $(H) : y' + y = 0$  admet pour solutions les fonctions  $y_H = Ce^{-x}$  où  $C \in \mathbb{R}$ .  
Les solutions de  $(E_3)$  sont donc les fonctions  $y = Ce^{-x} - x^2 + 3x$  où  $C \in \mathbb{R}$ .
- (c) Déterminer la solution de  $(E_3)$  qui s'annule en 0.  
 $y_0(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$ . La fonction cherchée est la fonction  $y_0 = -x^2 + 3x$ .
- (d) Question subsidiaire : Pourquoi n'a-t-on pas inséré de terme constant  $c$  dans le facteur  $ax^2 + bx$  de la solution particulière?  
On aurait alors récupéré une fonction de la forme  $ce^{-x}$  qui est solution de l'équation homogène. Ce terme qui aurait renvoyé 0 une fois substituée dans  $(E_3)$  et n'aurait rien amené pour la résolution.