

Rappels et compléments sur la dérivation

Table des matières

I	Composée de deux fonctions	1
I.1	Exemple :	1
I.2	Notations	1
I.3	Exercice	1
II	Dérivée de la composée de quelques fonctions :	2
II.1	Dérivée de $f \circ g$	2
II.2	Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$	2
II.3	Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$	2
II.4	Dérivée de $\frac{1}{u}$	3
II.5	Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$	3
II.6	Dérivée de e^u	3
III	Convexité d'une fonction	3
III.1	Fonction convexe	3
III.2	Point d'inflexion	5
III.3	Exemple 1	5
III.4	Exemple 2	6

I Composée de deux fonctions

I.1 Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Si on veut calculer $f(3)$, on commence par calculer 3^2 puis $\frac{1}{3^2}$.

Schématiquement : $f : x \mapsto x^2 \mapsto \frac{1}{x^2}$.

On applique donc d'abord la fonction carré, puis la fonction inverse. On dit qu'on a commencé la fonction carré par la fonction inverse.

I.2 Notations

Notons u la fonction carré : $u(x) = x^2$ et v la fonction inverse : $v(x) = \frac{1}{x}$.

Schématiquement : $f : x \xrightarrow{u} y = x^2 \xrightarrow{v} \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$.

On note : $f = v \circ u$, composée de u par v .

Donc : $v \circ u(x) = v(u(x))$.

$\triangleleft$: on commence par la fonction écrite la plus à droite.

I.3 Exercice

Écrire les fonctions suivantes comme composée de deux fonctions :

a $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^2$

b $g(x) = e^{x^3}$

c $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

II Dérivée de la composée de quelques fonctions :

II.1 Dérivée de $f \circ g$



Théorème admis

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J et f une fonction définie et dérivable sur J .
Alors $f \circ g$ est dérivable et $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$.
Pour tout $x \in I$, $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

Démonstration : Soit x_0 un réel de l'intervalle I .

On doit montrer que $\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0 .

$$\text{Or : } \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

g est dérivable en x_0 donc $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$.

g est continue en x_0 , donc $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$.

f est dérivable en $f(x_0)$ donc $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = f'(g(x_0)) = f' \circ g(x_0)$.

On en déduit que : $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$

II.2 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$



Propriété

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I , de fonction dérivée u' .
La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout nombre x tel que $u(x) \neq 0$ et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

On applique la formule de dérivations d'une fonction composée avec $g = u$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

Exemple : $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x + 7$ et $u'(x) = 6x + 5$.

$$\text{Alors : } f'(x) = \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 7}}.$$

II.3 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$



Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.
La fonction u^n est dérivable et $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$.

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec $g = u$ et $f(x) = x^n$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto (3x^2 + 5x - 7)^5$; $f = u^5$ avec $u(x) = (3x^2 + 5x - 7)$.

On a alors $f' = (u^5)' = 5u' u^4 = 5u' u^4$ avec $u'(x) = 6x + 5$.

$$\text{Par conséquent : } f'(x) = 5(6x + 5)(3x^2 + 5x - 7)^4.$$

II.4 Dérivée de $\frac{1}{u}$



Propriété

Soit u une fonction définie, non nulle et dérivable sur un intervalle I . Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.

La fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable et $(u^n)' = -n \times \frac{u'}{u^{n+1}}$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$ donc $f = \frac{1}{u^n}$ avec $\begin{cases} n = 5 \\ u(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$.

$f' = -n \frac{u'}{u^{n+1}} = -5 \times \frac{u'}{u^6}$ avec $u'(x) = 2x + 1$.

Par conséquent : $f'(x) = -\frac{5(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^6}$

II.5 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$



Propriété

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux nombres a et b .

La fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g' : x \mapsto a \times f'(ax + b)$.

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec $g(x) = ax + b$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \cos(2x + 3)$; $f'(x) = 2 \cos'(2x + 3) = \boxed{-2 \sin(2x + 3)}$.

II.6 Dérivée de e^u



Propriété

On suppose u dérivable sur un intervalle I .

Alors e^u est dérivable et $(e^u)' = u'e^u$

Exemple Soit $f(x) = e^{x^2 + \frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$f = e^u$ avec $u(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

$f' = u'e^u$ avec $u'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}$.

Alors : $f'(x) = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2 + \frac{1}{x}} = \boxed{\left(\frac{x^3 - 1}{x^2}\right) e^{x^2 + \frac{1}{x}}}$

III Convexité d'une fonction

III.1 Fonction convexe



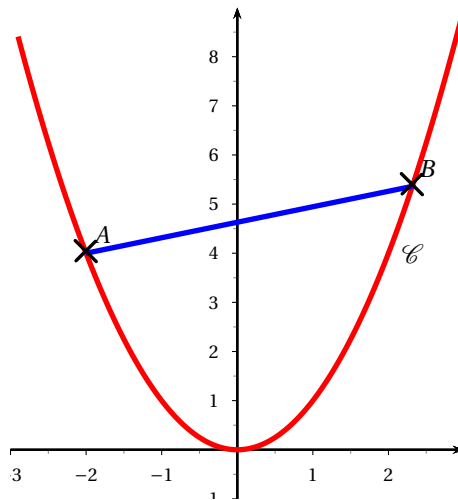
Définition

Si f est dérivable sur un intervalle I et si la dérivée f' est elle-même dérivable, on note f'' la dérivée de f' , donc $f'' = (f')'$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que f est **convexe** sur I lorsque $\mathcal{C}_f$ est en dessous de chacune de ses sécantes entre deux points d'intersection.



C'est le cas de la fonction carré, représentée ci-dessus.



Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux fois dérivable.
Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- f est convexe sur I .
- La courbe représentative de f est entièrement située au-dessus de ses tangentes.
- f' est croissante sur I .
- f'' est positive sur I .

Démonstration partielle : montrons que si f'' est positive, $\mathcal{C}$ est au-dessus de ses tangentes.

Soit a un réel de I ; l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$ (différence des ordonnées d'un point de $\mathcal{C}$ et d'un point de la tangente en a de même abscisse).

g est deux fois dérivable comme différence de fonctions deux fois dérivables.

$g'(x) = f'(x) - f'(a)$ car la dérivée de la fonction affine $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est $f'(a)$, coefficient directeur de la tangente.

Alors $g''(x) = f''(x)$.

Par hypothèse, $f''(x) \geq 0$ donc $g''(x) \geq 0$.

On en déduit que g' est croissante, avec $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.

g est donc décroissante pour $x \leq a$ puis croissante pour $x \geq a$, avec $g(a) = 0$.

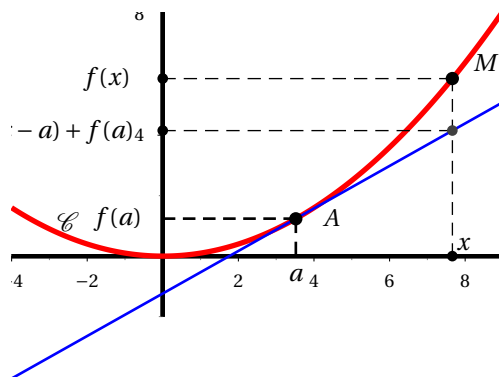
On en déduit le tableau de variation de g :

x	a
$g'(x)$	- 0 +
$g(x)$	↘ 0 ↗

Le minimum de g est 0, donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.

$\mathcal{C}$ est bien au-dessus de sa tangente.

Illustration ci-dessous



Remarque : f est concave si f' est décroissante ou si $f'' < 0$

III.2 Point d'inflexion



Définition

Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.
La fonction change alors de convexité; elle passe de fonction convexe à concave ou réciproquement.



Propriété

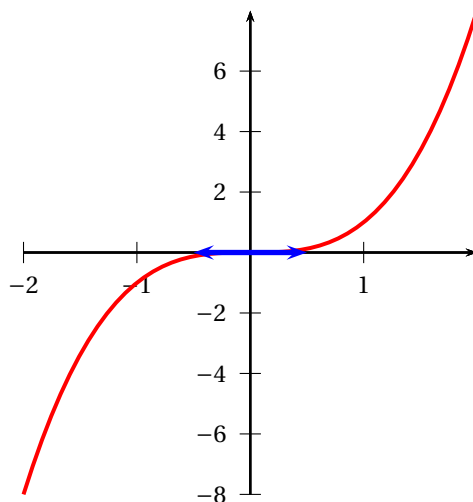
Soit f une fonction deux fois dérivable sur I .
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet un point d'inflexion au point abscisse a si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a .

III.3 Exemple 1

$$f(x) = x^3.$$

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et } f''(x) = 6x \text{ qui change de signe en } 0.$$

$\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion en 0. La courbe traverse sa tangente en O.



III.4 Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.

Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$.

f'' s'annule donc une seule fois en changeant de signe en $x = 2$

Le point M de coordonnées (2; -9) est donc le seul point d'inflexion de la courbe, comme on peut le vérifier sur sa représentation graphique.

