

Compléments sur les limites de fonctions

1 Limite d'une fonction composée

1.1 Pour commencer :

Soit la fonction f définie sur $] \frac{1}{2}; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$. On souhaite calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On considère les fonctions u et v définie par : $u(x) = 2 - \frac{1}{x}$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

Alors : $f(x) = v(u(x))$. On dit alors que f est la composée de la fonction u par la fonction v .

On calcule la limite de f en $+\infty$ de la façon suivante :

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ (car ... ?).

1.2 On dispose du théorème suivant :

Théorème (admis) :

a, b, c peuvent désigner $+\infty, -\infty$ ou un nombre réel.

Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v(u(x)) = c$

1.3 Exemple : Déterminer la limite d'une fonction composée :

- Soit f la fonction définie sur $] -\infty ; -2[\cup] 6 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{2x-12}{x+2}}$. Calculer la limite de f en $+\infty, -\infty$ et -2 par valeurs inférieures.
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R} - 1$ par $g(x) = \left(\frac{x^3 + x + 1}{x - 1} \right)^5$. Calculer la limite de g en $+\infty, -\infty$ et 1 .
- Calculer la limite $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction $h(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

2 Théorème de comparaison

2.1 Énoncé

Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de A où A désigne $+\infty, -\infty$ ou un réel.

On suppose que dans un voisinage de A , $f(x) \leq g(x)$, alors :

- Si $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = +\infty$ alors, $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = +\infty$
- Si $\lim_{x \rightarrow A} g(x) = -\infty$ alors, $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = -\infty$

La démonstration est identique à sa version pour les suites.

2.2 Théorème d'encadrement ou Théorème des gendarmes (admis) :

Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de x_0 où x_0 désigne $+\infty, -\infty$ ou un réel.

On suppose que dans un voisinage de x_0 , $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

On suppose de plus que f et h admettent la même limite réelle L ,

Alors, g converge et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$

2.3 Exemple : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement.

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions $f(x) = x + \sin(x)$ et $g(x) = \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1}$

3 Suites et composition

On montre et on admet le résultat suivant :

Ici, A désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$

Soit (u_n) une suite admettant A comme limite et f une fonction définie dans un voisinage de A .

Si f admet une limite L (L désignant un réel, $+\infty$ ou $-\infty$) en A , alors la suite $f(u_n)$ admet L comme limite.

C'est-à-dire que si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = A$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = L$

4 Limites et nombres dérivés

4.1 Rappel

On rappelle que dire qu'une fonction f est dérivable en un point x_0 c'est dire que $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et sa valeur est le nombre dérivé de f en x_0 noté $f'(x_0)$ (le rapport $t(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le taux de variations de f entre x et x_0).

Grâce aux fonctions dérivées, des formules permettent de calculer des $f'(x_0)$ et de remonter à des limites.

4.2 Exemple

$\sin$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin'(x) = \cos(x)$. En 0 cela donne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$.

4.3 Exercice

1. Calculer la limite en 0 des fonctions suivantes :

$$\Rightarrow \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(x)}{x^2}$$

2. Calculer la limite en 1 de $\frac{x^n - 1}{x - 1}$ où $n \in \mathbb{N}$