

Éléments de géométrie dans l'espace

1 Droites et plans de l'Espace

1.1 Règles d'incidence

Règles d'incidences : Les règles suivantes sont valables dans l'espace :

1. Par deux points distincts A et B passe une seule droite, notée (AB).
2. Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan, noté (ABC).
3. Si un plan contient deux points A et B, il contient toute la droite (AB).
4. Dans tout plan de l'espace, tout résultat de géométrie plane s'applique.

1.2 Remarques :

Un plan est une « région » plane « illimitée » mais elle est représentée en perspective cavalière par un parallélogramme (voir figure 1).

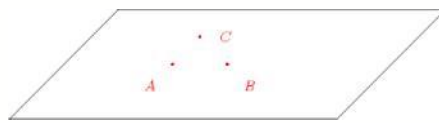


FIG. 1 – Un plan en perspective cavalière

La dernière règle indique que, dans tout plan de l'espace, tout se passe comme dans « LE » plan de la géométrie plane. On cherchera donc très souvent à se placer dans un plan de l'espace.

1.3 Positions relatives de droites et de plans.

Les résultats situations ci-dessous sont illustrés en annexe.

Définition 1 :

- * Deux droites de l'espace sont dites parallèles ssi elles sont contenues dans un plan et parallèles dans ce plan.
- * Deux droites peuvent ne pas se couper et ne pas être parallèles.
- * Lorsque deux droites sont sécantes en un point, elles sont coplanaires.

Définition 2 :

- * Deux plans sont dits parallèles ssi ils sont sans point commun ou bien confondus.
- * Deux plans non parallèles sont dits sécants ; dans ce cas, leur intersection est une droite. Il suffit donc de déterminer deux points appartenant simultanément aux deux plans pour déterminer cette droite.
- * Une droite peut :
 1. Percer un plan en un point, ou bien ;
 2. Être contenue dans ce plan, ou bien ;
 3. Ne pas rencontrer le plan, dans ce cas, le plan et la droite sont dits parallèle ;
 4. Lorsque deux plans P et P' sont parallèles, toute droite de P' est parallèle à P.

1.4 Deux résultats liés au parallélisme

Théorème 1 : Si un plan Q coupe deux plans parallèles P et P' alors les droites d'intersection sont parallèles (voir figure 2).

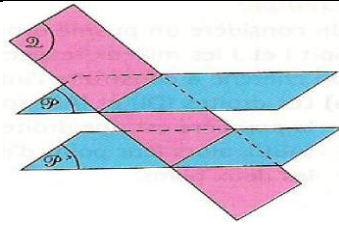
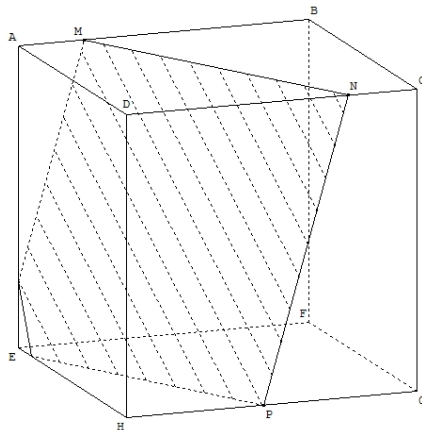


FIG. 2 – Intersection avec deux plans parallèles

Exemple

Ci-dessous, la figure est un cube, M est un point de $[AB]$, N un point de $[DC]$ et P un point de $[HG]$. Le polygone hachuré est une figure du plan $p = MNP$. p coupe le plan $EFGH$ selon (EP) et $ABCD$ selon (MN) .



Les plans $ABCD$ et $EFGH$ sont parallèles (faces opposées du cubes), par conséquent, $(MN) // (EP)$.

Théorème 2 : « théorème du toit »

Soit D et D' deux droites parallèles.

P est un plan contenant D et P' un plan contenant D' (voir figure 3).

Si les plans P et P' sont sécants, leur droite d'intersection Δ est parallèle à D et à D' .

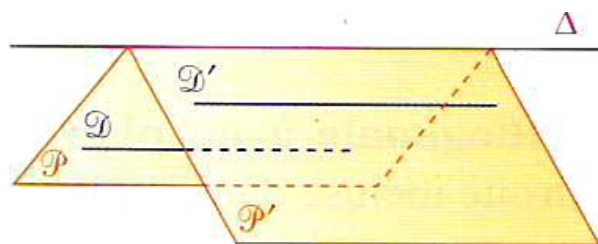
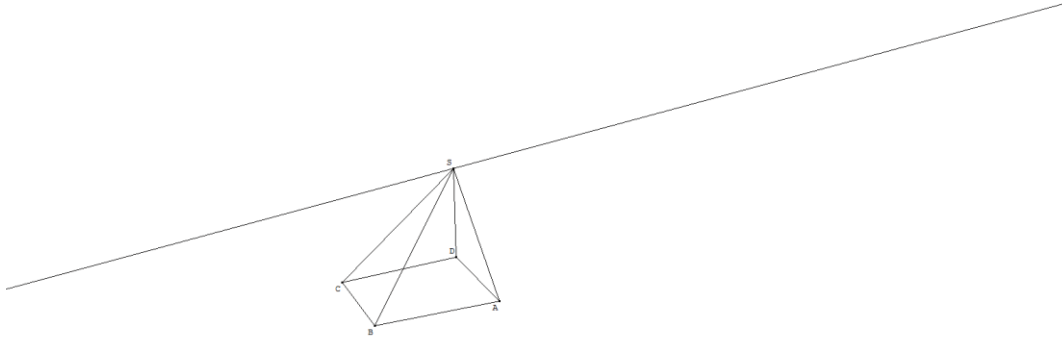


FIG. 3 – Théorème du toit

Exemple :

Soit SABCD une pyramide de sommet S de base un parallélogramme ABCD. Les plans SAB et SDC se coupent suivant la droite d parallèle à (AB) (ou (DC)) passant par S... Pas évident sur le dessin.

**2 Orthogonalité dans l'espace****Définition 1**

1. Deux droites de l'espace sont dites orthogonales ssi leur direction le sont ; autrement dit, sis un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.
2. Deux droites orthogonales ne sont pas forcément sécantes.
3. Si deux droites sont orthogonales, il existe une droite parallèle à l'une et qui coupe l'autre perpendiculairement.

Définition 2 : soit D une droite et P un plan de l'espace.

On dit que la droite D est perpendiculaire au plan P si elle est perpendiculaire à toutes les droites du plan P. (voir figure 4).

Théorème :

Si une droite D est perpendiculaire à deux droites sécantes d'un plan P, alors elle est perpendiculaire à ce plan (voir figure 5).

Ci-dessous

FIG 4 : définition de l'orthogonalité.

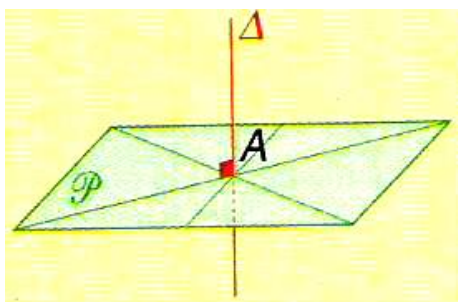
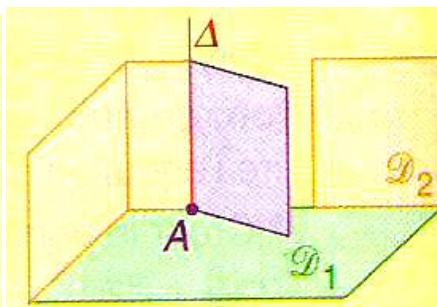


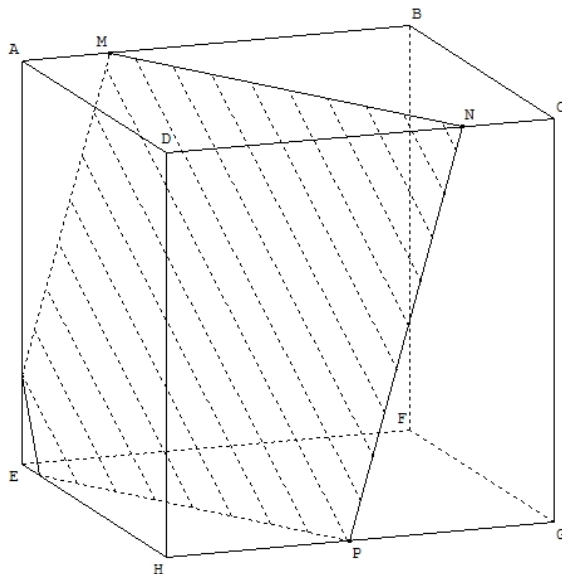
FIG 5 Théorème de la porte



Exemple :

Ci-dessous, la figure est un cube, M est un point de $[AB]$, N un point de $[DC]$ et P un point de $[HG]$. Le polygone hachuré est une figure du plan $p = MNP$. p coupe le plan EFGH selon (EP) et ABCD selon (MN) .

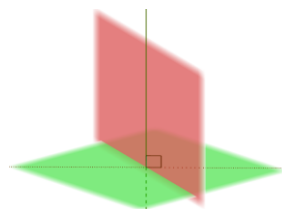
On a vu que $(MN) \parallel (EP)$.



(MN) est une droite du plan ABCD. Vu la nature des faces ADHE et CDHG, (HD) est perpendiculaire à (AD) et (DC) ; par conséquent, (HD) est perpendiculaire au plan ABCD. Comme (MN) est une droite du plan ABCD, il vient : (HD) et (MN) sont orthogonales.

Définition 3

Deux plans sont dits perpendiculaires lorsque l'un contient une droite orthogonale à l'autre plan.



Dans le cas où P et P' sont orthogonaux, ils sont sécants suivant une droite Δ .

Exercice : Démontrer que des droites sont orthogonales

ABC est un triangle équilatéral. E est le point d'intersection de ses médianes.

La droite d passant par E est orthogonale au plan (ABC) .

La pyramide ABCD est telle que D soit un point de la droite d .

Démontrer que les droites (BD) et (AC) sont orthogonales.

Réponse :

La droite d est orthogonale au plan (ABC) . Comme la droite (AC) appartient au plan (ABC) , la droite (AC) est orthogonale à la droite d .

Par ailleurs, la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BE) car dans un triangle équilatéral, les médianes et les hauteurs sont confondues. Ainsi, (AC) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BED) : (BE) et d . Donc (AC) est orthogonale au plan (BED) .

La droite (BD) appartient au plan (BED) donc la droite (AC) est perpendiculaire à la droite (BD) .

