

Produit scalaire dans l'espace

Produit scalaire dans le plan, rappels.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan :

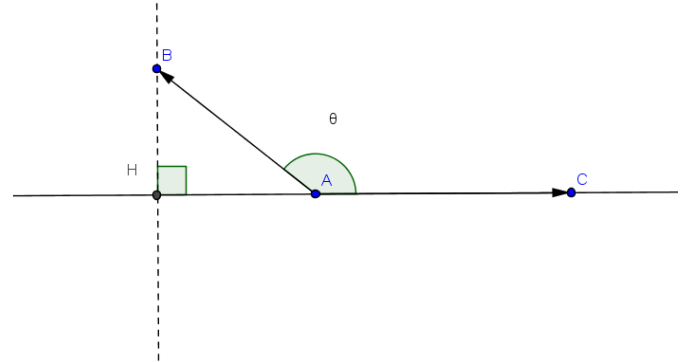
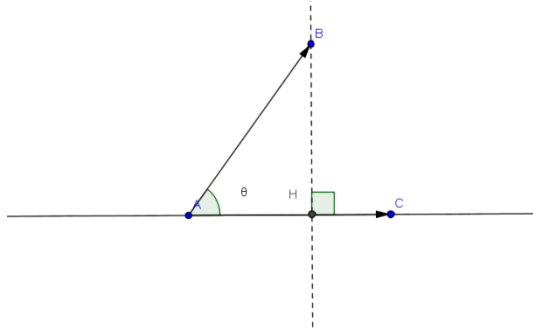
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, on pose $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Sinon, soit A, B et C trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On appelle H le projeté orthogonal

de B sur (AC). On pose :

$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = AH \times AC \text{ si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont de même sens} \\ \text{et} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = -AH \times AC \text{ si } \overrightarrow{AH} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ de sens contraire} \end{cases}$$

Ci-dessous, les deux cas :



On établit la formule simplifiée :

Notant θ une mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos(\theta)$.

Plus généralement, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$.

Expression du produit scalaire dans un R.O.N.

On établit qu'en R.O.N., si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Règles de calculs

On établit les égalités suivantes : pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$, pour tous réels a et b, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (a \times b) \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Orthogonalité

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si toute droite dirigée par $\vec{u}$ est perpendiculaire à toute droite dirigée par $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

On établit que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (cette caractérisation comprend les cas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$).

Produit scalaire dans l'espace

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace ; ces vecteurs sont toujours dans un plan (qui est unique si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires). Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un plan qui les contient. On montre que le réel $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ainsi défini ne dépend pas du plan qui contient $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En particulier, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, on a toujours : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u} ; \vec{v})$

Propriétés

Les propriétés algébriques sont les mêmes que dans le plan.

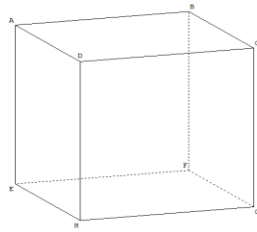
Orthogonalité dans l'espace

Deux droites de l'espace sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux ce qui s'exprime algébriquement par $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Deux droites orthogonales de l'espace peuvent être orthogonales et ne pas se couper.

Exemple

Dans le pavé droit ci-dessous, $(AE) \perp (FG)$ mais ces droites ne se coupent pas.



Rappel : un RON est un repère dans lequel les trois vecteurs du repère $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux et de longueur 1.

Expression du produit scalaire dans un RON

On étend la formule du plan à l'espace :

Dans un RON, soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Vecteur normal à un plan

Définition

➤ On dit qu'un vecteur $\vec{w}$ est orthogonal à un plan p dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (deux vecteurs non colinéaires) si

$$\vec{u} \perp \vec{w} \text{ et } \vec{v} \perp \vec{w}.$$

➤ On a vu qu'une droite d est dite perpendiculaire à un plan p si d est orthogonale à toutes les droites de p .
On a la propriété (rappels) :

Une droite d est perpendiculaire à un plan $p \Leftrightarrow d$ est orthogonale à deux droites sécantes du plan p .

Preuve (à connaître).

De gauche à droite, c'est évident.

De droite à gauche :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs de deux droites sécantes de p ; $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont nécessairement non colinéaires, par suite ces vecteurs dirigent p .

Une droite Δ de p est dirigée par $\vec{w}$ qui est dans le plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ c'est-à-dire qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}$ tels que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

Appelons finalement (d) une droite dirigée par un vecteur $\vec{a}$ perpendiculaire à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

(d) est orthogonale à toute droite dirigée par $\vec{u}$ et à toute droite dirigée par $\vec{v}$.

Par hypothèse, $\vec{a} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$. On a alors $\vec{a} \cdot \vec{w} = \vec{a} \cdot (\alpha \vec{u} + \beta \vec{v}) = \alpha (\vec{a} \cdot \vec{u}) + \beta (\vec{a} \cdot \vec{v}) = 0 + 0 = 0$.

On en déduit que $\vec{a} \perp \vec{w}$ et par conséquent (d) est orthogonale à Δ quel que soit la droite Δ de p .

Fin de la preuve.

Remarque : toute droite dirigée par $\vec{a}$ est orthogonale à toute droite du plan p

➤ Soit p un plan dirigé par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ (non colinéaires). Il n'existe qu'une direction de droite orthogonale à p c'est-à-dire que deux droites perpendiculaires à un même plan p sont parallèles (admis).

Définition

Tout vecteur non nul orthogonal à un plan p est dit normal à p .

Il n'existe qu'une direction normale à un plan p .

Équation cartésienne d'un plan dans un RON

Soit A un point de l'espace et $\vec{n}$ un vecteur non nul.

On cherche le lieu des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ (1). On traduit (1) à l'aide des coordonnées.

Avec $M(x,y,z)$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on obtient : (1) $\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ en posant } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$

Comme $\vec{n} \neq \vec{0}$, au moins un des réels a, b ou c n'est pas nul ; par exemple $a \neq 0$.

On obtient : $x = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}z - \frac{d}{a} = \alpha y + \beta z + \delta$ en posant $-\frac{b}{a} = \alpha$, $-\frac{c}{a} = \beta$ et $-\frac{d}{a} = \delta$.

L'égalité précédente équivaut au système (s) $\begin{cases} x = \alpha t + \beta t' + \delta \\ y = t \\ z = t' \end{cases} \quad t, t' \in \mathbb{R}.$

Appelons B le point de coordonnées $(\delta, 0, 0)$, $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}$ celui de

coordonnées $\begin{pmatrix} \beta \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (s) équivaut à $\overrightarrow{OM} = t\vec{u} + t'\vec{v} + \overrightarrow{OB}$ ou encore $\overrightarrow{BM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ où t et t' sont des réels arbitraires.

Les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ montrent que ces vecteurs ne sont pas colinéaires, l'égalité $\overrightarrow{BM} = t\vec{u} + t'\vec{v}$ signifie alors que M est un point du plan p passant par B dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On a procédé par équivalences successives ; le lieu des points M cherché est donc un plan dont les caractéristiques sont dans la démonstration.

On vérifie que $\vec{u} \cdot \vec{n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ c'est-à-dire que le plan p trouvé est orthogonal à toute droite dirigée par $\vec{n}$; $\vec{n}$ est un vecteur normal à p. D'autre part, A est clairement un point de ce plan (car $\overrightarrow{AA} \cdot \vec{n} = 0$).

On retiendra :

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est un plan passant par A dont $\vec{n}$ est un vecteur normal.

Dans la démonstration, on a vu que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ se traduisait analytiquement par une relation de la

forme : $ax + by + cz + d = 0$ où $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de $\vec{n}$.

Inversement, soit $M(x,y,z)$ un point vérifiant $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b, c non tous nuls.

Il existe au moins un point $P(x_0, y_0, z_0)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$; par exemple si $a \neq 0$, le point P de coordonnées $(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ vérifie $ax + by + cz + d = 0$.

On a : $ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$

$$\Leftrightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \text{ qui est la traduction analytique de } \overrightarrow{PM} \cdot \vec{n} = 0.$$

Par suite,

$ax + by + cz + d = 0$ est l'équation cartésienne d'un plan ; ce plan admet $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

Position relative de deux plans

Plans parallèles

On montre le résultat suivant :

Deux plans sont parallèles $\Leftrightarrow$ un vecteur normal de l'un est colinéaire à un vecteur normal de l'autre.

* Ainsi, soit $p : ax + by + cz + d = 0$ et $p' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$; alors les plans p et p' sont parallèles si et seulement si les listes (a,b,c) et (a',b',c') sont proportionnelles.

* Les plans p et p' sont confondus si et seulement si les listes (a,b,c,d) et (a',b',c',d') sont proportionnelles.

Plans perpendiculaires, définition, caractérisation

Deux plans sont dits perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Exemple : deux faces latérales d'un pavé droit sont portées par des plans perpendiculaires.

On montre le résultat suivant :

Deux plans sont perpendiculaires $\Leftrightarrow$ un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

Deux exercices extraits du bac

Exercice 1

L'espace est muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $-x + y + z = 0$. Soit A le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

1. Démontrer que les plans (P) et (P') sont perpendiculaires.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d) .

3. Déterminer les coordonnées des points H et K projections orthogonales de A sur (P) et (P') respectivement. Comparer les distances AH et AK .

4. Montrer que le plan $(A, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AK})$ est orthogonal à la fois à (P) et à (P') .

Exercice 2

Pour chacune des 5 propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite (d) dont un système d'équations paramétriques est :

$$\begin{cases} x = 2 - \frac{t}{2} \\ y = 1 \\ z = 5 - \frac{3}{2}t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

On note A le point de coordonnées $(2 ; -1 ; 1)$, B le point de coordonnées $(4 ; -2 ; 2)$ et C le point de (d) d'abscisse 1.

1. Proposition 1 : « La droite (d) est parallèle à l'axe $(O ; \vec{j})$ ».

2. Proposition 2 : « Le plan P d'équation $x + 3z - 5 = 0$ est le plan passant par A et orthogonal à (d) ».

3. Proposition 3 : « La mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est $\frac{\pi}{3}$ radians ».

4. Soit G le point défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Proposition 4 : « Les segments $[AG]$ et $[BC]$ ont le même milieu ».

5. Proposition 5 : « La distance CB est inférieure ou égale à la distance de C à sa projection orthogonale D sur le plan (P) d'équation $x + 3z - 5 = 0$ ».