

## Géométrie vectorielle dans l'espace

### 1) Vecteurs de l'espace.

On étend à l'espace la notion de vecteurs du plan.

Un vecteur de l'espace est représenté par un segment orienté et sert à définir le déplacement translation.

Pour tous points A et B, écrire  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  c'est dire que B est l'image de A par la translation de vecteur  $\vec{u}$ .

Pour tout point A, le vecteur  $\overrightarrow{AA}$  est le vecteur nul noté :  $\vec{0}$ . La translation associée laisse fixe tout point de l'espace ; c'est l'identité de l'espace.

Puis, pour tous points A, B, C et D écrire  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  c'est dire que ABDC est un parallélogramme.

### 2) Vecteurs colinéaires

Dire que deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires c'est dire que ces vecteurs définissent la même direction.

Si  $\vec{u}$  ou  $\vec{v}$  est le vecteur nul, on dira que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires. On montre le résultat :

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement si il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = t \cdot \vec{v}$

La propriété précédente est une caractérisation algébrique d'une propriété géométrique.

Ainsi, pour tous points A, B, C et D :

- $(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  colinéaires  $\Leftrightarrow$  il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{CD}$ .
- A, B et C alignés  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  colinéaires  $\Leftrightarrow$  il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AB} = t \overrightarrow{AC}$ .

#### Exercice 1

Soit ABCD un tétraèdre. On note I le milieu de [CD] et K le point défini par  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4} (2 \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ .

Exprimer  $\overrightarrow{BI}$  puis  $\overrightarrow{BK}$  à l'aide de  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BD}$  ; en déduire que B, K et I sont alignés.

### 3) Droites de l'espace

Soit A et B deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est le lieu des points M tels que  $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$  où t décrit  $\mathbb{R}$ .

Le couple  $(A, \overrightarrow{AB})$  constitue un repère de (AB), t est l'abscisse de M dans ce repère.

#### Exercice 2

Soit ABCD un tétraèdre. Soit M un point de (AB) d'abscisse t dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB})$  et N le point de (CD) de même abscisse que M dans le repère  $(C, \overrightarrow{CD})$ . On note I = m(A,C), J = m(B,D) et K = m(M,N). Déterminer le lieu des points K lorsque M décrit (AB).

Indication. On montrera les égalités suivantes :  $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = t(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 2t \overrightarrow{IJ}$ , puis  $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = 2 \overrightarrow{IK}$ .

On en déduira une expression de  $\overrightarrow{IK}$ . Conclure.

### 4) Vecteurs coplanaires

Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires. Le plan vectoriel engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est l'ensemble des vecteurs  $\vec{w}$  de la forme  $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$  où x et y décrivent  $\mathbb{R}$  (une telle somme  $x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$  s'appelle une combinaison linéaire de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ).

Deux vecteurs non colinéaires définissent une direction de plans unique tout comme un vecteur non nul définit une seule direction de droites. On dit que ces vecteurs sont des vecteurs directeurs du plan.

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont contenus dans une infinité de plans.

Trois vecteurs sont dits coplanaires lorsque ces vecteurs sont dans un même plan vectoriel.

Plus précisément, soient  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs de l'espace.

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires,  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires  $\Leftrightarrow$  il existe x et y dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\vec{w} = x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}$

( $\vec{w}$  est dans le plan engendré par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ ),

Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires,  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont toujours coplanaires quel que soit  $\vec{w}$ .

### Exercice 3

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non colinéaires.

1. Montrer  $\forall x, y$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow x = y = 0$ .

2. Montrer  $\forall x, y, x', y'$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $x\vec{u} + y\vec{v} = x'\vec{u} + y'\vec{v} \Leftrightarrow x = x'$  et  $y = y'$ .

Cet exercice montre que la décomposition d'un vecteur à l'aide des deux vecteurs d'un repère est unique (et c'est heureux).

### 5) Plans de l'espace

Dans l'espace des points, trois points non alignés A, B et C définissent un plan unique (noté plan ABC). Ce plan passe par A et est dirigé par les vecteurs non colinéaires  $\vec{AB}$  et  $\vec{AC}$  ; ce triplet  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$  constitue un repère de ce plan.

Un point M est dans le plan ABC  $\Leftrightarrow$  il existe x et y dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$

x et y sont les coordonnées de M dans le plan ABC muni du repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ .

Quatre points A, B, C et D sont dits coplanaires lorsque ces points sont dans un même plan ;

c'est-à-dire dans le cas où A, B et C ne sont pas alignés lorsqu'il existe x et y dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\vec{AD} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$ .

Si A, B et C sont alignés, les points A, B, C et D sont toujours coplanaires quel que soit le point D.

### Commentaires

Les vecteurs permettent de traiter algébriquement des problèmes de géométrie.

On utilise les caractérisations suivantes qu'il faut retenir :

1) Soit d et  $\Delta$  deux droites dirigées par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  respectivement.

$$d // \Delta \Leftrightarrow \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires (c'est-à-dire } \vec{u} = t\vec{v}, t \in \mathbb{R})$$

2) Soit (p) un plan dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\Delta$  une droite dirigée par un vecteur  $\vec{w}$ , alors,

$$\Delta \text{ est parallèle à (p) } \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires (c'est-à-dire } \vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v} \text{ où } x, y \in \mathbb{R})$$

3) Soit (p) un plan dirigé par les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et (p') un plan dirigé par  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$ , alors,

$$(p) \text{ est parallèle à (p') } \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{a} \text{ d'une part et } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{b} \text{ d'autre part sont coplanaires.}$$

Par ailleurs, deux plans non parallèles sont sécants suivant une droite.

### Exercice 4 (cet exercice peut faire l'objet d'une question de cours)

Démontrer le théorème du toit à l'aide des vecteurs.

### Exercice 5

Soit ABCDEFGH un cube.

1) Soit M le point défini par  $\vec{AM} = \frac{1}{4}\vec{AD}$  et L le point défini par  $\vec{EL} = \frac{1}{4}\vec{EF}$ .

Montrer que  $\vec{ML} = \frac{1}{4}\vec{DB} + \vec{DH}$ . Conclusion ?

2) On appelle J le centre de la face BCGF et N le point défini par  $\vec{NA} + 2\vec{NJ} = \vec{0}$ .

Montrer que B, N et H sont alignés.

3)

3.1 On note I le centre de la face ABFE. On définit les points R et S par  $3\vec{ER} = \vec{EH}$  et  $3\vec{AS} = \vec{AB}$ .

Montrer que  $\vec{EA}$ ,  $\vec{RS}$  et  $\vec{BH}$  sont coplanaires.

3.2 Justifier que A est un point du plan HFI et que G est un point du plan DBJ.

3.3 En déduire que les plans HFI et DBJ sont parallèles.

## 6) Repère de l'espace

Soit  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs non coplanaires de l'espace. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un unique triplet de réels  $(x,y,z)$  tel que  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .  $(x,y,z)$  sont les coordonnées de  $\vec{u}$  dans la base  $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ . On note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ .

Un repère de l'espace est un ensemble ordonné  $r = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  où  $O$  est un point et  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

Pour tout point  $M$ , il existe un unique triplet de réels  $(x,y,z)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ .  $(x,y,z)$  sont les coordonnées de  $M$  dans le repère  $r$ . On note  $M(x,y,z)$ .

On montre les résultats suivants :

➤  $M(x,y,z) = N(x',y',z') \Leftrightarrow x = x', y = y' \text{ et } z = z'$ .

➤ Pour tous vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x = x', y = y' \text{ et } z = z'$ .

➤ Pour tous vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \vec{u} \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ .

➤ Pour tous points  $A$  et  $B$ ,  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$  et si  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , alors  $I \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$ .

➤ En RON, si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ , la longueur du vecteur  $\vec{u}$  appelée norme de  $\vec{u}$  vaut  $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

➤ En RON,  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$ .

## 7) Représentation paramétrique d'une droite de l'espace

Soit  $d$  la droite passant par  $A(x_A, y_A, z_A)$  et dirigée par  $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ .

On traduit par les coordonnées l'équivalence  $M \in d \Leftrightarrow$  il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$  ; ce qui donne :

$M(x,y,z) \in d \Leftrightarrow$  il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\begin{cases} x = x_A + \alpha \times t \\ y = y_A + \beta \times t \\ z = z_A + \gamma \times t \end{cases}$ . Ce système constitue un système d'équations

paramétriques de la droite  $d$ . Un tel système n'est pas unique pour une droite  $d$  ; il suffit de prendre un autre point de  $d$  à la place de  $A$  ou un vecteur non nul  $\vec{v}$  colinéaire à  $\vec{u}$ .

Remarques :

Le système est dit paramétrique car il fait intervenir un paramètre réel "t".

Il n'existe pas d'équation cartésienne simple d'une droite de l'espace. On verra plus tard qu'on peut présenter un système d'équations cartésiennes d'une droite de l'espace.

## 8) Représentation paramétrique ou cartésienne d'un plan de l'espace

Soit  $p$  un plan passant par  $A$  et dirigé par deux vecteurs  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  (non colinéaires).

$M(x,y,z) \in p \Leftrightarrow$  il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  tels que  $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ .

On traduit cette égalité à l'aide des coordonnées comme pour une droite, on obtient un système d'équations paramétriques de  $p$ . Mais un tel système est plutôt lourd à manipuler.

On peut montrer que tout plan  $P$  de l'espace peut être représenté par une équation cartésienne de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  où  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels avec  $a, b$  et  $c$  non tous nuls.

Soit  $P'$  un plan d'équation :  $a'x + b'y + c'z + d' = 0$  ; on a :

- $P$  et  $P'$  confondus si et seulement si les listes  $(a,b,c,d)$  et  $(a',b',c',d')$  sont proportionnelles.
- Si seules les listes  $(a,b,c)$  et  $(a',b',c')$  sont proportionnelles c'est que les plans sont strictement parallèles.

**Remarque 1 :**

$z = 0$  est l'équation du plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ,  $x = 0$  est l'équation du plan  $(O, \vec{j}, \vec{k})$  et  $y = 0$  celui du plan  $(O, \vec{i}, \vec{k})$ .

**Remarque 2 :**

La partie linéaire de l'équation cartésienne d'un plan est l'équation cartésienne du plan vectoriel qui le dirige. Ainsi, l'équation de plan: (P) :  $a.x + b.y + c.z + d = 0$  admet comme partie linéaire

«  $ax + by + cz = 0$  ». Ainsi,  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$  dirige (P) si et seulement si  $a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 = 0$ .

Exemple : Donner un vecteur directeur du plan (P) :  $-2x + y - 3z + 1 = 0$ .

**Remarque 3 :**

Une droite peut être « vue » comme intersection de deux plans non parallèles ; ainsi le système formé de deux équations cartésiennes de deux plans non parallèles constitue un système d'équations cartésiennes de la droite intersection.

Exemple : On considère la droite (d) dont un système d'équations cartésiennes est :  $\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ -3x + 2x + z = 0 \end{cases}$

Donner un point ainsi que qu'un vecteur directeur de (d).

Exercice 6

L'espace est rapporté à un repère  $r = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soient A(-1, 0, 1) et B(-5, -2, 7).

1. Déterminer une représentation paramétrique de (AB).

2. Déterminer l'intersection de (AB) avec le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

3. Soit C(0, 1, 2),  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$  et d la droite passant par C dirigée par  $\vec{u}$ . Étudier l'intersection de d avec (AB).

Exercice 7 (extrait de bac)

L'espace est muni d'un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration pourra consister à fournir un contre-exemple.

1. La droite d de représentation paramétrique :  $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \\ z = 3t - 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  est parallèle au plan p dont un système

d'équations paramétriques est  $\begin{cases} x = -\mu \\ y = \lambda \\ z = \mu - 2\lambda \end{cases}, \mu, \lambda \in \mathbb{R}$ .

2. La droite d est contenu dans p.

3. Une équation cartésienne de p est  $x + 2y + z = 0$ .

4. Les droites de représentations paramétriques respectives :

(d) :  $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  et (d') :  $\begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$  sont sécantes.

5. On considère les points : A de coordonnées (-1 ; 0 ; 2), B de coordonnées (1 ; 4 ; 0), et C de coordonnées (3 ; -4 ; -2). Le plan (ABC) a pour équation  $x + z = 1$ .

Exercice 8 (extrait de bac)

L'espace est muni du repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soient (P) et (P') les plans d'équations respectives  $x + 2y - z + 1 = 0$  et  $-x + y + z = 0$ .

1. (P) et (P') sont-ils parallèles ? Justifier.

2. Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est :  $\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ .

Démontrer que les plans (P) et (P') se coupent selon la droite (d).