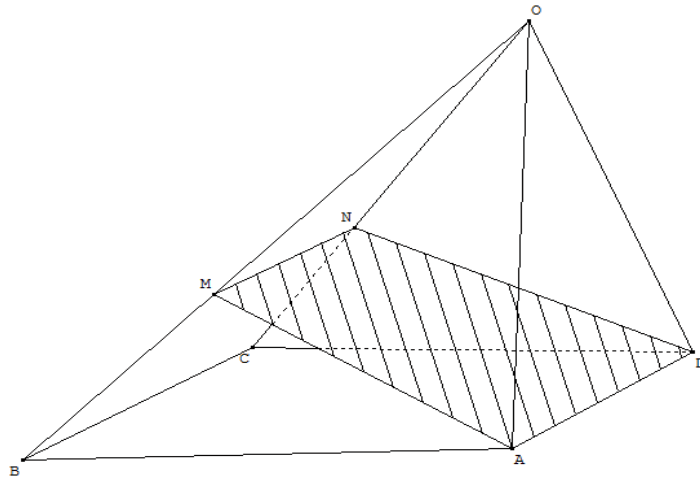


Problème de géométrie spatiale

On considère la figure ci-dessous.



OABCD est une pyramide dont la base est un carré ABCD de côté "c".

Le sommet O est un point de la perpendiculaire en A au plan ABC avec $OA = c$.

Un plan p passant par A et D coupe [OB] en M et [OC] en N.

1. Montrer que toutes les faces latérales de la pyramide sont des triangles rectangles.
2. Montrer que les droites (DA) et (AM) sont orthogonales.
3. En utilisant le théorème du toit, montrer que $(MN) \parallel (AD)$.
4. Dédire des questions précédentes la nature exacte du quadrilatère AMND.
5. On pose $OM = x\sqrt{2}$ où $x \in [0 ; c]$. Montrer que $MN = x$ et $AM = \sqrt{x^2 + (c-x)^2}$.
6. Exprimer l'aire de du quadrilatère AMND à l'aide de x et de "c".
7. On définit la fonction f sur $I = [0 ; c]$ par $f(x) = \frac{1}{2} (x + c) \sqrt{(c-x)^2 + x^2}$.

Étudier les variations de f sur son domaine et vérifier l'existence d'un minimum pour f sur I .

8. On note H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAM. Montrer que (OH) est orthogonale au plan AMN.

Il résulte de cette propriété que OH mesure la hauteur de la pyramide OAMND de sommet O et de base AMND.

9. Dans le triangle OAM, montrer que la hauteur issue de M mesure x .

10. Exprimer l'aire du triangle OAM de deux façons pour montrer que $OH = \frac{cx}{\sqrt{x^2 + (c-x)^2}}$.

En déduire que le volume V_2 de la pyramide OAMND est un trinôme du second degré en x .

11. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le volume V_2 vaut la moitié de celui de la pyramide OABCD.