

Correction du problème de géométrie spatiale

1. Comme (OA) est perpendiculaire au plan ABC, elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan ; en particulier, (OA) $\perp$ (AB) et (OA) $\perp$ (AD).

Les triangles (OAB) et (OAD) sont donc rectangles en A.

On déduit de ce qui précède que $OD = OB = c\sqrt{2}$ (les triangles (OAB) et (OAD) sont isocèles et rectangles en A avec $OA = AB = AD = c$).

Puis, dans le carré ABCD, $AC = c\sqrt{2}$.

Comme (AC) est une droite du plan ABCD, alors (OA) $\perp$ (AC). Dans le triangle (OAC) rectangle en A, $OA = c$ et $AC = c\sqrt{2}$, d'où par le théorème de Pythagore, $OC = c\sqrt{3}$.

Dans le triangle (OCD), on peut vérifier maintenant que $OC^2 = OD^2 + DC^2$ et par suite, (ODC) est rectangle en D.

Dans le triangle (OCB), on peut aussi vérifier que $OC^2 = OB^2 + BC^2$ et par suite, (OBC) est rectangle en B.

Les faces latérales de la pyramide OABCD sont bien des triangles rectangles.

2. On a (AD) $\perp$ (OA) (car (OA) est perpendiculaire au plan (ABD)) et (AD) $\perp$ (AB) (ce sont deux côtés consécutifs du carré (ABCD)). Il en résulte que (AD) est perpendiculaire à deux droites sécantes du plan OAB ((OA) et (AB)) donc (AD) est perpendiculaire au plan OAB ; (AD) est alors perpendiculaire à toutes les droites du plan OAB en particulier (AM). On a bien (AD) $\perp$ (AM).

3. (MN) est l'intersection du plan p et du plan OBC. p contient (AD) et OBC contient (BC).

Comme (BC) $\parallel$ (AD) (ce sont deux côtés opposés du carré ABCD), on peut appliquer le théorème du toit pour conclure que les droites (BC), (AD) et (MN) sont parallèles entre elles et donc (MN) $\parallel$ (AD).

4. AMND est un trapèze rectangle d'après ce qui précède.

5. Comme (MN) $\parallel$ (BC), les triangles OMN et OBC sont en situation de Thalès, par suite :

$$\frac{OM}{OB} = \frac{MN}{BC}, \text{ d'où } MN = c \times \frac{x\sqrt{2}}{c\sqrt{2}} = x.$$

Ici, on travaille dans le plan OAB. Appelons P le pied de la hauteur issue de M dans le triangle OAM.

Les angles $\widehat{OMP}$ et $\widehat{OBA}$ sont égaux à 45 degrés car correspondants avec (MP) $\parallel$ (AB) coupées par la sécante commune (OB). Le triangle OMP est donc rectangle et isocèle en P ; d'où $OP = PM$.

Comme $OM = x\sqrt{2}$, par le théorème de Pythagore, $OP = PM = x$.

On a ensuite $PA = c - x$ et dans le triangle PAM rectangle en P, $AM = \sqrt{(c-x)^2 + x^2}$ par le théorème de Pythagore.

6. AMND est un trapèze rectangle de bases [MN] et [AD] et de hauteur AM.

$$\text{On en déduit l'aire cherchée : } \frac{b+b}{2} \times h = \frac{x+c}{2} \times \sqrt{(c-x)^2 + x^2}.$$

$$7. \text{Après calculs, } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(c-x)^2 + x^2}} \times (4x - c) \text{ qui est du signe de } 4x - c \text{ sur I.}$$

$$f'(x) > 0 \text{ pour } \frac{c}{4} < x < c \text{ et } f'(x) < 0 \text{ pour } 0 < x < \frac{c}{4}. \text{ Le minimum est donc atteint en } \frac{c}{4}.$$

8. Par définition de H, (OH) $\perp$ (AM) et $H \in [AM]$. O et H sont deux points du plan OAB, par suite, (OH) est contenue dans ce plan. On a vu à la question 2 que (AD) était perpendiculaire au plan OAB ; elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan et en particulier : (AD) $\perp$ (OH).

La droite (OH) étant perpendiculaire à deux droites sécantes du plan AMN ((AD) et (AM)) est perpendiculaire à ce plan.

9. Cette question a été traitée à la question 5.

10. L'aire du triangle OAM vaut $\frac{1}{2} PM \times OA$ (où P = pied de la hauteur issue de M dans OMA) ou encore

$$\frac{1}{2} \times OH \times AM. \text{ Il vient : } OH = \frac{PM \times OA}{AM} = \frac{cx}{\sqrt{x^2 + (c-x)^2}} \text{ (AM a été calculée en 5).}$$

$$\text{On obtient } V_2 = \frac{1}{3} \frac{cx}{\sqrt{x^2 + (c-x)^2}} \times \frac{x+c}{2} \times \sqrt{(c-x)^2 + x^2} = \frac{1}{6} cx(x+c). V_2 \text{ est bien un polynôme du second degré en } x.$$

$$11. \text{On doit résoudre } \frac{1}{6} cx(c+x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} c \times c^2 \text{ qui n'admet qu'une racine positive } x_0 = (\sqrt{5} - 1) \times \frac{c}{2}.$$

Remarque : on aurait pu traiter une grande partie du problème en utilisant le RON (A,B,D,O). Dans ce repère, A(0,0,0), B(c,0,0), C(c,c,0), D(0,c,0) et O(0,0,c).