

Fonction exponentielle

Table des matières

I	Fonction exponentielle	1
II	Étude de la fonction exponentielle :	2
II.1	Sens de variation :	2
II.2	Limites à l'infini	2
III	Propriétés algébriques	3
III.1	Exponentielle de l'opposé d'un réel :	3
III.2	Exponentielle de la somme de deux réels :	3
III.3	Exponentielle de la différence de deux réels :	3
III.4	Exponentielle d'une somme de réels :	4
III.5	Le nombre e ; la notation e^x :	4
III.6	Résumé des différentes propriétés avec cette notation :	5
III.7	Courbe représentative avec les tangentes en 0 et 1	5
III.8	Limites importantes (croissances comparées)	5
IV	Exponentielle d'une fonction	6

I Fonction exponentielle



Théorème (première partie admise)

- Il existe une fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- Celle-ci est **unique**.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle. On la note $\exp$.

Démonstration

- On **admet** l'existence.
- Cette fonction ne s'annule pas et est strictement positive.

Démonstration : Considérons la fonction g définie par $g(x) = f(x) \times f(-x)$.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables. La dérivée de $x \mapsto f(-x)$ est $x \mapsto -f'(-x)$ car la dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$. On en déduit que : $f'(x) = f'(x)f(-x) + f(x) \times (-f'(-x)) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$. Or, par définition de f , $f' = f$ donc $g'(x) = f(x)f(-x) - (x)f(-x) = 0$.
 g est donc une fonction **constante** sur $\mathbb{R}$.

Pour trouver cette valeur, il suffit de calculer l'image d'un nombre particulier.

$g(0) = [f(0)]^2 = 1^2 = 1$ donc $g(0) = 1$. Par conséquent : $g(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f ne peut donc pas s'annuler ; en effet, s'il existait une valeur x_0 avec $f(x_0) = 0$, on aurait : $g(x_0) = f(x_0)f(-x_0) = 0$; or $g(x_0) = 1$, ce qui est contradictoire.

Positivité : Supposons qu'il existe un nombre x_0 avec $f(x_0) < 0$. f est dérivable, donc continue. $f(x_0) < 0$ et $f(0) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existerait un nombre α tel que $f(\alpha) = 0$, ce qui est impossible d'après ce qui précède.

- **Démonstration de l'unicité** Supposons qu'il existe une autre fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant également $g' = g$ et $g(0) = 1$. Soit la fonction $h = \frac{f}{g}$. h est dérivable : $h' = \frac{f'g - fg'}{g^2} = 0$ (car $f' = f$ et $g' = g$). h est donc constante sur $\mathbb{R}$. $h(0) = 1$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1$ donc $f(x) = g(x)$ donc $f = g$.

Cette unique fonction f vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$ est notée $\exp$.


Résumé des propriétés :
 Pour tout réel x :

- $\exp x > 0$
- $\exp 0 = 1$
- $\exp'(x) = \exp(x)$

II Étude de la fonction exponentielle :

II.1 Sens de variation :


Propriété
 La fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration : La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$, donc pour tout réel x , $\exp'(x) > 0$ puisque $\exp(x) > 0$. La fonction $\exp$ est donc croissante.

II.2 Limites à l'infini


Théorème
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$

Démonstration : Soit f la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \exp(x) - x$. f est dérivable et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \exp'(x) - 1 = \exp(x) - 1$. $\exp$ est croissante et $\exp(0) = 1$, donc, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) \geq 0$. On en déduit que f est croissante et comme $f(0) = \exp(0) - 0 = \exp(0) = 1 > 0$ donc $f(x) > 0$. Par conséquent : $f(x) > 0$ donc $\exp(x) > x$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$.

On a vu au début que, pour tout x , $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$. En posant $X = -x$, donc

$$x = -X, \text{ on a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \exp(-X) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\exp(X)} = 0.$$

Conséquences :

1. Pour tout $a > 0$, $\exp(a) > 0$
2. Pour tous réels a et b , $\exp a = \exp b \Leftrightarrow a = b$.

3. Pour tous réels a et b , $\exp a < \exp b \Leftrightarrow a < b$.

Démonstration :

1. $\exp$ est croissante et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$ donc $\exp$ est une fonction positive.
2. (a) $a = b \Rightarrow \exp(a) = \exp(b)$ comme pour n'importe quelle fonction.
(b) $\exp(a) = \exp(b) \Rightarrow a = b$ car la fonction $\exp$ est croissante
3. Même démonstration que dans le cas d'égalité

III Propriétés algébriques

III.1 Exponentielle de l'opposé d'un réel :



Propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$$

Démonstration : On a déjà vu que $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$ donc $\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}$.

III.2 Exponentielle de la somme de deux réels :



Propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exp(x + y) = \exp(x) \exp(y).$$

Démonstration Soit y un réel quelconque fixé. On considère alors la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\exp(y)} \times \exp(x + y)$ (la variable est x). f est dérivable, comme composée de fonctions dérivables; $\frac{1}{\exp(y)}$ est une constante. La dérivée de $x \mapsto \exp(x + y)$ est $x \mapsto 1 \times \exp'(x + y) = \exp(x + y)$. $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{\exp(y)} \times \exp(x + y)$ donc $f' = f$. $f(0) = \frac{1}{\exp(y)} \times \exp(0 + y) = \frac{1}{\exp(y)} \times \exp(y) = 1$. On en déduit que la fonction f est la fonction exponentielle (unicité de la fonction vérifiant ces propriétés). Par conséquent : $f(x) = \exp(x)$ donc, pour tout x , $\frac{1}{\exp(y)} \exp(x + y) = \exp(x)$, d'où $\boxed{\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)}$

Remarque : on a vu dans le I que la seule fonction vérifiant cette relation fonctionnelle et $f(0) = 1$ devait vérifier $f' = f$, donc était la fonction exponentielle (par unicité de la fonction vérifiant les deux conditions $f' = f$ et $f(0) = 1$).

III.3 Exponentielle de la différence de deux réels :



Propriété

Pour tous réels x et y : $\exp(x - y) = \frac{\exp x}{\exp y}$

Démonstration : $\exp(x - y) = \exp(x + (-y)) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Exemple : Pour tout réel x , $\frac{\exp(2x+3)}{\exp(2x-1)} = \exp[(2x+3) - (2x-1)] = \exp 4$

III.4 Exponentielle d'une somme de réels :



Propriété

Pour tous réels $x_1, x_2, \dots, x_n$, $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$. **Écriture symbolique :**

$$\exp\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \prod_{i=1}^n \exp(x_i)$$

Démonstration : On démontre la propriété par récurrence sur n .

- **Initialisation :** Pour $n = 1$, il n'y a qu'un terme x_1 ; on a évidemment $\exp(x_1) = \exp(x_1)$!
- **Hérédité :** on suppose la propriété vraie pour un entier n quelconque. $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)$. Alors : $\exp(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1}) = \exp[(x_1 + x_2 + \dots + x_n) + x_{n+1}] = \exp((x_1 + x_2 + \dots + x_n)) \times \exp(x_{n+1})$ (d'après la propriété fonctionnelle de l'exponentielle) $= [\exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n)] \times \exp(x_{n+1}) = \exp(x_1) \times \exp(x_2) \times \dots \times \exp(x_n) \times \exp(x_{n+1})$. (c.q.f.d.)



Propriété

Pour tout réel x , $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Démonstration : Lorsque $n > 0$, on applique la propriété précédente en prenant tous les x_i égaux à x .

Pour $n = 0$, l'égalité est vérifiée. Si $n < 0$, $\exp(nx) = \exp((-n)(-x)) = (\exp(-x))^{-n} = \left[\frac{1}{\exp x}\right]^{-n} = (\exp(x))^n$

III.5 Le nombre e ; la notation e^x :



Définition

$e = \exp(1)$. Valeur approchée : $e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995$.

Pour la plupart des exercices, il suffit d'utiliser $e \approx 2,7$ ou $e \approx 2,72$.

Remarque : e est, comme π , un nombre transcendant, c'est-à-dire solution d'aucune équation polynomiale, donc en particulier non rationnel)



Notation

Pour tout entier n , on a : $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp 1)^n = e^n$ en utilisant la notation précédente. Plus généralement, on convient de noter $\exp(x)$ par e^x .

III.6 Résumé des différentes propriétés avec cette notation :



Propriétés

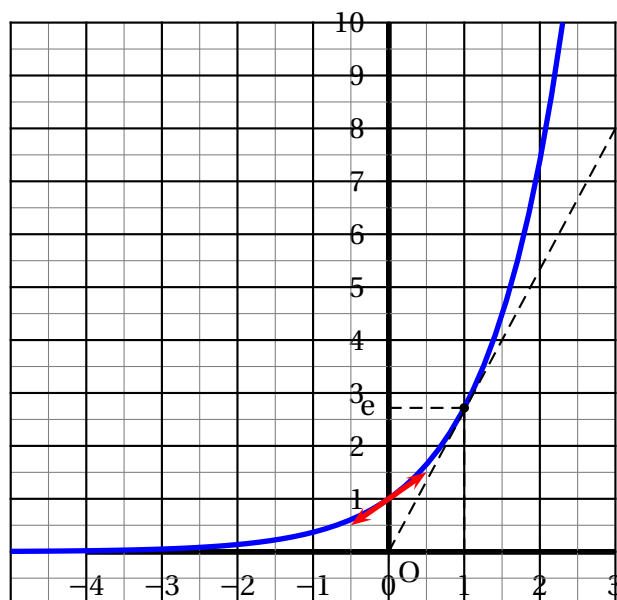
Pour tous réels x, y et tout entier relatif n :

- $e^0 = 1$
- $e^x > 0$
- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{n \cdot x}$

III.7 Courbe représentative avec les tangentes en 0 et 1

- La tangente en 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0) = \exp(0) = e^0 = 1$.
- La tangente en 1 a pour équation $y = \exp'(1)(x - 1) + e^1 = ex$; cette tangente passe donc par l'origine.
- La fonction $\exp$ est croissante; l'axe des abscisses est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
- $e^1 = e \approx 2,7$ et $e^2 \approx 7,4$

Courbe représentative de $\exp$



III.8 Limites importantes (croissances comparées)

Théorème

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$

Démonstrations :

- Pour tout x , $e^x > x$ donc, pour tout $x > 0$, $e^{\frac{x}{2}} > \frac{x}{2}$ d'où, puisque $x > 0$ $(e^{\frac{x}{2}})^2 > \left(\frac{x}{2}\right)^2$ qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{-X}{e^{-X}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\frac{X}{e^X} = -\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X}} = 0$ car $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$.
- Pour tout $n \neq 0$, on pose $X = \frac{x}{n}$ (et donc $x = nX$). On a alors : $\frac{e^x}{x^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^{nX}}{(nX)^n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{(e^X)^n}{n^n X^n}$
 $= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{n^n} \left(\frac{e^X}{X}\right)^n \right] \cdot \frac{1}{n^n}$ est une constante ; $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = +\infty$ d'où $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- Pour $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$, on pose $X = -x$. Alors : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \lim_{X \rightarrow +\infty} (-X)^n e^{-X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[(-1)^n \frac{X^n}{e^X} \right] = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left[(-1)^n \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} \right]$
 $= 0$ car $\lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^X}{X^n}\right) = +\infty$

IV Exponentielle d'une fonction

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable et a pour dérivée : $(e^u)' = u' e^u$.

Exemples :

- $f(x) = e^{2x+4}$; $f = e^u$ avec $u(x) = 2x + 3$. $u'(x) = 2$; $f' = u' e^u$ donc $f'(x) = 2e^{2x+3}$.
- $f(x) = e^{x^2}$ sur $]0 ; +\infty[$. $f = e^u$ avec $u(x) = x^2$. $f' = u' e^u$ avec $u'(x) = 2x$ donc $f'(x) = 2x e^{x^2}$.
- $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ sur $]0 ; +\infty[$. $f = e^u$ avec $u(x) = \frac{1}{x}$. $f' = u' e^u$ avec $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$.