

Rappels de première sur les suites

Table des matières

1	Généralités	1
2	Construire une suite :	1
3	Représentation graphique d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$	1
4	Sens de variation :	2
5	Suites arithmétiques :	3
6	Suites géométriques :	5

1 Généralités



Définition

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

Si u est le nom de la suite, l'image de n par u se note $u(n)$ (notation fonctionnelle) ou de manière plus usuelle u_n (notation indicielle). L'ensemble des termes de la suite se note alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 Construire une suite :

Il existe essentiellement deux façons :

- a) **Suites définies par la donnée explicite de leurs termes : Exemple :** Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 2n + 1$.

On peut calculer chaque terme de manière explicite séparément les uns des autres.

De même, soit (v_n) la suite définie par : $v_n = f(n)$ où $f(x) = x^2 + 5$. On peut calculer chaque terme indépendamment les uns des autres.

- b) **Suites définies par récurrence :**

La suite est définie par la donnée d'un ou de plusieurs premiers termes et par une relation entre un terme et un ou plusieurs termes précédents.

Exemples :

- Soit la suite (w_n) définie par :
$$\begin{cases} w_0 &= 3 \\ w_{n+1} &= 4w_n + 5 \end{cases}$$
 .
On a : $w_1 = 17$, $w_2 = 73 \dots$

- **Suite de Fibonacci :**

Soit la suite (F_n) définie par :
$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$
 .
On a : $F_2 = 2$, $F_3 = 3$, $F_4 = 5$, $F_5 = 8 \dots$

Pour calculer chaque terme, il faut avoir calculé les termes précédents.

Pour ceux qui souhaitent en savoir davantage sur la suite de Fibonacci, cliquer [ici](#)

Remarque : lorsqu'une suite est définie par récurrence, on essaye de se ramener à une formule explicite des termes, mais ce n'est pas toujours possible.

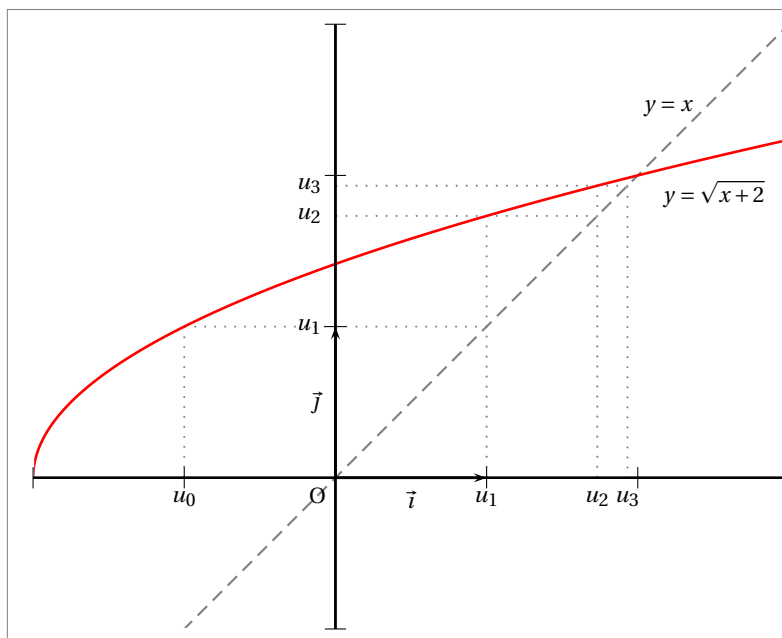
3 Représentation graphique d'une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = -0,5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{x + 2}$.

On représente la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$. Sur l'axe des abscisses, on place $u_0 = -0.5$.

$u_1 = f(u_0)$ est l'ordonnée du point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0 . L'ordonnée u_1 est « renvoyée » sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$. On construit ensuite u_2 de la même façon à partir de u_1 cette fois (Voir dessin).



Commentaire : Ce type de graphique permet de conjecturer des propriétés de la suite. Ici, il semble que la suite soit croissante et les termes soient aussi proches de l qu'on veut de l'abscisse du point d'intersection de C_f et de la droite d'équation : $y = x$.

4 Sens de variation :



Définition

Une suite (u_n) est croissante si et seulement si, pour tout n , $u_n \leq u_{n+1}$.
 Une suite (u_n) est décroissante si et seulement si, pour tout n , $u_n \geq u_{n+1}$.
 Une suite (u_n) est constante si et seulement si, pour tout n , $u_n = u_{n+1}$.

Techniques d'étude :

1. **Technique fonctionnelle** : elle s'applique lorsque la suite est fonctionnelle, c'est-à-dire lorsque l'on a $u_n = f(n)$. On étudie alors les variations de la fonction f . Si f est croissante (décroissante), alors la suite est croissante (décroissante)

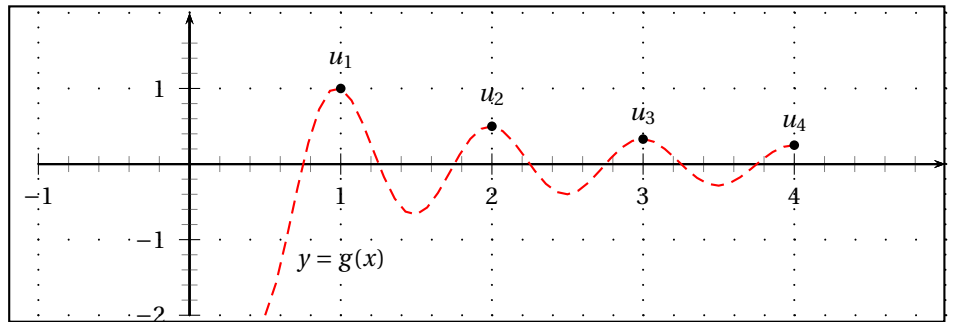
Exemple : La suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 6n + 1$ est croissante pour $n \geq 3$.

En effet, la fonction $f : x \mapsto x^2 - 6x + 1$ a pour dérivée : $f' : x \mapsto 2x - 6 = 2(x - 3)$ et $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$, donc f est croissante sur $[3 ; \infty[$.



Attention

La réciproque est fautive : Exemple : La fonction $g(x) = \frac{\cos(2\pi x)}{x}$ n'est pas monotone, mais la suite (u_n) définie par $u_n = g(n) = \frac{1}{n}$ est décroissante.



2. Techniques algébriques :

(a) On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ en fonction de n .

Exemple : soit la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = u_n + n^2$.

Pour tout n , $u_{n+1} - u_n = n^2 \geq 0$ donc (u_n) est croissante.



Théorème

(b) On suppose que, pour tout n , $u_n > 0$,

Si, pour tout n , le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est supérieur à 1, la suite est croissante; s'il est compris entre 0 et 1, celle-ci est décroissante.

Démonstration : $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$ qui est du signe de $u_{n+1} - u_n$ puisque le dénominateur u_n est positif pour tout n .

Exemple : soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$. Quel est le sens de variation de cette suite?

Il existe deux types de suites très simples et très courantes en mathématiques qui méritent donc d'être étudiés en détail; ce sont les suites **arithmétiques** et les suites **géométriques**.

5 Suites arithmétiques :



Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un nombre r , appelé raison de la suite, tel que, pour tout n , $u_{n+1} = u_n + r$.
On a alors : $u_{n+1} - u_n = r$ (la différence de deux termes consécutifs est constante)



Propriété

Terme général : $u_n = u_0 + nr$

ou plus généralement : $u_n = u_p + (n - p)r$ ($n \geq p$).

La suite est complètement déterminée si l'on connaît un terme et la raison.

Démonstration : se fait par récurrence.



Théorème

Les suites arithmétiques sont les suites dont le terme général est de la forme : $u_n = an + b$, où a et b sont des constantes.

Démonstration :

- Si (u_n) est arithmétique, $u_n = u_0 + nr = an + b$ avec $a = r$ et $b = u_0$.
- Réciproque :** soit (u_n) avec $u_n = an + b$; on a : $u_{n+1} - u_n = a$ donc (u_n) est arithmétique de raison $r = a$

Somme de termes consécutifs :



Propriété

Soit $\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Alors : $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :

On écrit σ_n à l'endroit et à l'envers et on ajoute terme à terme :

$$\sigma_n = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$$

$$\sigma_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

Par somme : $2\sigma_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$ (car il y a n termes égaux à $n+1$).

Par conséquent : $\sigma_n = \frac{n(n+1)}{2}$



Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique. $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$.

- Première formule :** $S_n = (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}$

- Deuxième formule :** $S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$.

- Plus généralement :** si $S = x + \dots + y$ est la somme de p termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors : $S = \frac{p(x+y)}{2}$
(demi-somme des termes extrêmes $\times$ nombre de termes).

Démonstration :

- Première formule :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \dots + (u_0 + nr) = (n+1)u_0 + r(1 + 2 + 3 + \dots + n) = (n+1)u_0 + r\sigma_n \\ &= (n+1)u_0 + r \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

- Deuxième formule : écrivons S_n de deux façons différentes, une fois à l'endroit, une fois à l'envers :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n$$

$$S_n = u_n + u_{n-1} + \dots + u_1 + u_0.$$

En ajoutant terme à terme :

$$2S_n + (u_0 + u_n) + (u_1 + u_{n-1}) + \dots + (u_p + u_{n-p}) + \dots + (u_n + u_0).$$

Or, pour tout p : $u_p + u_{n-p} = (u_0 + pr) + (u_n - pr) = u_0 + u_n$.

On en déduit : $2S_n = (n+1)(u_0 + u_n)$ (car il y a $(n+1)$ termes) donc $S_n = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$

- $S = x + \dots + y = x + (x+r) + (x+2r) + \dots + x + (p-1)r$ (puisque'il y a p termes). $S = y + (y-r) + (y-2r) + \dots + y - (p-1)r$ (en écrivant la somme à partir du dernier terme).

En effectuant la somme terme à terme, on obtient : $2S = (x+y) + (x+y) + \dots + (x+y) = p(x+y)$ (puisque'il y a p termes) d'où :

$$S = \frac{p(x+y)}{2}.$$

Exemple : calculer $S = 100 + 102 + \dots + 154$.

Ce sont les termes d'une suite arithmétique de raison $r = 2$. Il y a 28 termes ($154 = 100 + 27 \times 2$).

$$\text{Donc : } S = \frac{28(100+154)}{2} = 3556$$

- **Variations :**



Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
 (u_n) est croissante si, et seulement si, r est positif.
 (u_n) est décroissante si, et seulement si, r est négatif.
 (u_n) est constante si, et seulement si, $r = 0$.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = r$ d'où le résultat.

6 Suites géométriques :



Définition

Une suite (u_n) est géométrique si et seulement s'il existe un nombre réel q appelé raison de la suite, tel que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = qu_n$.



Théorème

Alors, pour tout n : $u_n = qu_{n-1}$ ou plus généralement : $u_n = u_p q^{n-p}$ pour $p \leq n$.
 Une suite géométrique est entièrement déterminée par un terme et sa raison.

La démonstration se fait par récurrence.



Théorème

Les suites géométriques sont les suites dont le terme général est de la forme $u_n = aq^n$, a et q étant des constantes.

Démonstration :

- Si (u_n) est géométrique, $u_n = u_0 q^n = aq^n$ avec $a = u_0$.
- **Réciproque :** Si $u_n = aq^n$, $u_{n+1} = aq^{n+1}$ donc $u_{n+1} = au_n$: (u_n) est bien géométrique, de raison a .

Somme de termes consécutifs :



Propriété

Soit q un nombre. Posons $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{i=1}^n q^i$.

- Si $q = 1$, $\sigma_n = (n+1)$.
- si $q \neq 1$, on a : $\sigma_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$

Démonstration :

- Si $q = 1$, c'est évident; $S_n + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$.

- Si $q \neq 1$, on calcule S_n et qS_n et on soustrait :

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n.$$

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}.$$

Alors : $S_n - qS_n = 1 - q^{n+1}$ (il ne reste que le premier terme de la première ligne et le dernier de la deuxième ligne).

D'où : $S_n(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ et : $S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$



Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$).

- Soit $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

- Si $S = x + \dots + y$ est la somme de p termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q ($q \neq 1$), alors : $S = x \left(\frac{1 - q^p}{1 - q} \right)$