

Limite de suites

Table des matières

I	Limites des suites :	1
I.1	Limite infinie :	1
I.2	Cas des suites croissantes non majorées	1
I.3	Limite finie	2
I.4	Unicité de la limite	2
I.5	Limite et ordre (Admis)	3
I.6	Théorème des gendarmes (admis)	3
I.7	Opérations et limites	3
I.8	Limites et puissances	4
II	Théorème de convergence monotone :	4
III	Limite des suites usuelles :	5

I Limites des suites :

I.1 Limite infinie :



Définition :

- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle $]A; +\infty[$ avec A réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
- Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $-\infty$ signifie que tout intervalle $] -\infty; A[$ avec A réel contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On écrit alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exemples :

- Soit (u_n) définie par : $u_n = n^2$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration : soit $A > 0$. Prenons $p = E(\sqrt{A}) + 1$. Alors $p^2 > A$. Pour tout $n \geq p$, $u_n = n^2 > p^2 > A$ donc $u_n \in [A; +\infty[$.

D'après la définition, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- $u_n = -n^3$: de même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

I.2 Cas des suites croissantes non majorées



Définition

- Dire qu'une suite (u) est majorée signifie qu'il existe un réel M tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$.
- Dire qu'une suite u est minorée signifie qu'il existe un réel m tel que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$.

Exemple : (u) est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = 2 + \frac{1}{n}$. (u) est minorée et majorée.



Propriété :

- (a) Si (u) est une suite croissante non majorée, alors (u) tend vers $+\infty$.
- (b) Si (u) est une suite décroissante non minorée, alors (u) tend vers $-\infty$.

Démonstration de (a) :

Soit A un réel quelconque. Comme (u) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n > A$.
La suite (u) est croissante, donc, pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$. Alors, pour tout $n \geq p$, $u_n \in]A; +\infty[$. Ainsi, la suite tend vers $+\infty$.
Même démonstration pour (b)

1.3 Limite finie



Définition

ℓ désigne un réel quelconque. Dire qu'une suite (u) a pour limite ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite est convergente vers ℓ .

Notation et exemples : On écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple : $u_n = \frac{1}{n}$ tend vers 0.

Remarque : une suite qui n'est pas convergente est divergente.



Définition

Une suite divergente est une suite non convergente.
Elle a une limite infinie **ou** n'a pas de limite.

Exemple : u est la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : Que peut-on dire de la suite (u_n) définie par : $u_n = (-1)^n$?

Exercice : Montrer qu'une suite convergente est bornée.

Solution :

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel ℓ .

Considérons par exemple l'intervalle $]\ell - 1; \ell + 1[$.

D'après la définition de la convergence, il existe un réel A tel que, pour tout $n > A$, $u_n \in]\ell - 1; \ell + 1[$.

Les termes $u_0, u_1, \dots, u_A$ sont en nombre fini, donc bornés, par le plus petit et le plus grand d'entre eux.

Les termes u_n , pour $n > A$ sont bornés par $\ell - 1$ et $\ell + 1$.

On en déduit que la suite est bornée.

1.4 Unicité de la limite



Théorème

Soit (u_n) une suite convergente. Elle admet donc une limite ℓ .
Cette limite est **unique**.

Démonstration :

Effectuons un raisonnement par l'absurde.

Supposons que la suite admette deux limites, ℓ et ℓ' , avec $\ell < \ell'$.

Posons $h = \frac{\ell' - \ell}{3}$.

Puisque la suite converge vers ℓ , il existe un entier A , tel que, pour tout $n > A$, $u_n \in]\ell - h; \ell + h[$. La suite converge vers ℓ' , donc il existe un entier B , tel que, pour tout $n > B$, $u_n \in]\ell' - h; \ell' + h[$.

Soit C le maximum de A et de B : $C = \max(A; B)$.

Pour $n > C$, $u_n \in]\ell - h; \ell + h[\cap]\ell' - h; \ell' + h[$; or, ces deux intervalles sont disjoints.

En effet : $\ell' - h - (\ell + h) = \ell' - \ell - 2h = \ell' - \ell - 2 \frac{\ell' - \ell}{3} = \frac{3(\ell' - \ell) - 2(\ell' - \ell)}{3} = \frac{\ell' - \ell}{3} > 0$.

C'est impossible, donc l'hypothèse de départ est fausse.

I.5 Limite et ordre (Admis)



Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes et de limite ℓ et ℓ' .
On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ (respectivement $u_n \geq v_n$).
Alors
 $\ell \leq \ell'$ (respectivement $\ell \geq \ell'$)

Commentaire :

- Autrement dit, on passe à la limite dans l'inégalité $u_n \leq v_n$.
- Dans le théorème, on peut avoir $u_n < v_n$ (inégalité stricte) mais dans la conclusion, l'inégalité reste large : $\ell \leq \ell'$. (Le vérifier avec les suites $\frac{1}{n+1}$ et $\frac{1}{n}$).
- En conséquence, si (u_n) est une suite convergente et majorée (respectivement minorée) par un réel M , alors sa limite est majorée (respectivement minorée) par ce réel M .

I.6 Théorème des gendarmes (admis)



Théorème des gendarmes

- **Premier cas :** Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Soit une autre suite (v_n) . S'il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $v_n \geq u_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
On a une propriété analogue si la limite est $-\infty$.
- **Deuxième cas :** Soient trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ et s'il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

Démonstration (hors-programme) :

- **Premier cas :**
Soit $A > 0$ un nombre quelconque.
 (u_n) tend vers $+\infty$, donc il existe un entier q tel que, pour tout $n \geq q$, $u_n > A$.
Pour tout $n \geq p$, $v_n \geq u_n$.
Soit $r = \max(p; q)$. (r est le plus grand des deux entiers p et q).
Pour tout $n \geq r$, $A < u_n \leq v_n$ donc $v_n > A$.
La suite (v_n) tend donc vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
- **Deuxième cas :**
Soit $I =]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$ un intervalle quelconque centré sur ℓ .
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ donc il existe un entier q tel que, pour tout $n \geq q$, $u_n \in I$.
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ donc il existe un entier r tel que, pour tout $n \geq r$, $w_n \in I$.
On sait que, pour tout entier $n \geq p$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.
Soit $s = \max(p; q; r)$.
Pour tout entier $n \geq s$, $\ell - \alpha < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \alpha$, donc $v_n \in I$.
On en déduit que la suite (v_n) a aussi pour limite ℓ .

I.7 Opérations et limites

a) Addition ou soustraction

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

c) Quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si (v_n) a pour limite	$\ell \neq 0'$	$\pm\infty$	0	ℓ'	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$ si elle existe	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarque : Les formes indéterminées sont : « $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ ».

I.8 Limites et puissances



Propriété

- Soit $q > 1$; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Soit $q \in]-1 ; 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$

Démonstration :

- Soit $a > 0$ un réel. Démontrons par récurrence que, pour tout n , $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
a) Pour $n = 0$: $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + na = 1 + 0a = 1$ donc c'est vrai au rang $n = 0$
b) On suppose que c'est vrai pour un rang n quelconque, donc $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
Alors : $(1 + a)^{n+1} = (1 + a)^n(1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) = 1 + a + na + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$ car $na^2 > 0$.
La propriété est vraie au rang $n + 1$, donc héréditaire.
Elle est donc vraie pour tout n .
- Soit $q > 1$. Il existe a tel que $q = 1 + a$.
Alors $q^n = (1 + a)^n \geq 1 + na$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 0$, c'est évident
Si $0 < q < 1$, on pose $Q = \frac{1}{q} > 1$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Q}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{Q^n}\right) = 0$ d'après ce qui précède.
Si $-1 < q < 0$, $q = -Q$ avec $0 < Q < 1$ et on applique ce qui précède.

II Théorème de convergence monotone :



Théorème admis

- Si une suite est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite est décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $u_n = 2, \underbrace{4848 \cdots 48}_{n \text{ groupes } 48}$ pour $n \geq 1$.

Il est clair que cette suite est croissante, majorée par 3 (ou 2,5), donc elle est convergente vers une limite réelle ℓ , avec $\ell = 2,48484848484848 \cdots$. Essayons de trouver une **expression rationnelle** de ℓ .

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_n &= 2 + \frac{48}{100} + \frac{48}{1000} + \cdots + \frac{48}{10^{2n}} = 2 + 48 \times \left(\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} \right) \\ &= 2 + 48 \times \left[\left(\frac{1}{10^2} \right) + \left(\frac{1}{10^2} \right)^2 + \left(\frac{1}{10^2} \right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{10^2} \right)^n \right]. \end{aligned}$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.

$$\text{On en déduit : } u_n = 2 + 48 \times \frac{1}{10^2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2 + 48 \times \frac{1}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n}{\frac{99}{100}} = 2 + 48 \times \frac{1}{100} \times \frac{100}{99} \left(1 - \left(\frac{1}{10^2} \right)^n \right).$$

$$\text{Comme } -1 < \frac{1}{10^2} < 1, \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{10^2} \right)^n = 0.$$

$$\text{On en déduit : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = 2 + 48 \times \frac{1}{99} = \frac{2 \times 99 + 48}{99} = \boxed{\frac{246}{99}}.$$

III Limite des suites usuelles :

Il convient de connaître les limites usuelles suivantes :

1. Une suite de la forme $u_n = n^p$ où p est un entier non nul tend vers $+\infty$.
2. La suite $u_n = \sqrt[n]{n}$ tend vers $+\infty$.
3. Une suite de la forme $u_n = \frac{1}{n^p}$ où p est un entier non nul tend vers 0.
4. Une suite de la forme $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ où p est un entier non nul tend vers 0.
5. Un polynôme en n se comporte en $+\infty$ comme son monôme de plus haut degré.
6. Une fraction rationnelle en n se comporte en $+\infty$ comme le rapport simplifié de son monôme de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemples :

La suite $u_n = -3n^3 + 2n^2 - 45$ est un polynôme en n dont le terme de plus haut degré est $-3n^3$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

La suite $u_n = \frac{-2n^2 + n - 4}{4n^2 - 10n - 6}$ est une fraction rationnelle en n ; elle se comporte en $+\infty$ comme le rapport simplifié $\frac{-2n^2}{4n^2} = -\frac{1}{2}$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\frac{1}{2}$.