

Limites de fonctions

Table des matières

1	Quantificateurs	1
2	Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$	1
3	Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$:	3
4	Limite infinie en un réel	3
5	Limite finie en un réel :	4
6	Opérations et limites	4
7	Limite d'un polynôme en $\pm\infty$:	5
8	Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$:	5
9	Limite et ordre :	6
10	Limite par croissances comparées de la fonction e^x et x^n où $n \in \mathbb{N}^*$ en $+\infty$:	6

1 Quantificateurs



Définition

- **Quantificateur existentiel** : L'expression « il existe » se note $\exists$; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :
Exemple : il existe un réel x tel que x^2 soit strictement positif peut se noter :
 $\exists x \in \mathbb{R} / x^2 > 0$
- **Quantificateur universel** : L'expression « pour tout » ou « quel que soit » se note $\forall$; Ce symbole ne peut pas se mettre dans une phrase en français; il ne peut se mettre que dans une expression mathématique, toujours en **début** :
Exemple : pour tout réel x , $|x|$ est positif ou nul peut se noter :
 $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0$

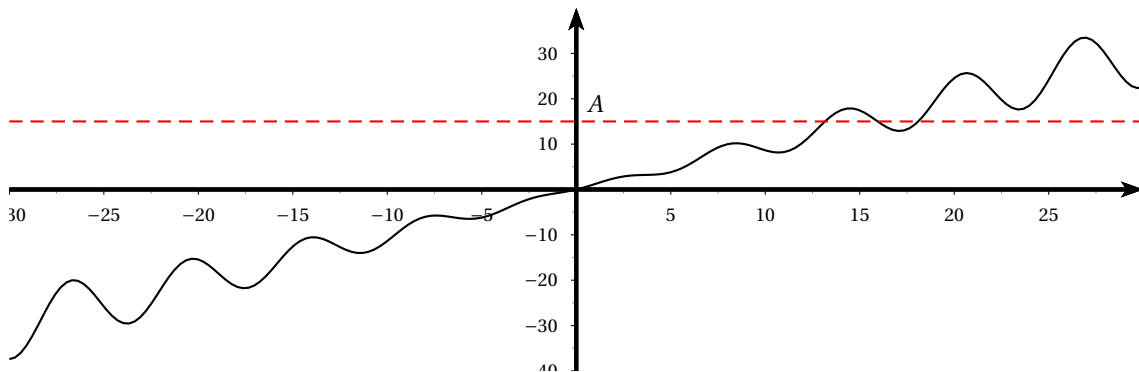
2 Limite infinie en $-\infty$ ou $+\infty$

Définitions



Définition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que tout intervalle $[A; +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand.
Traduction : Pour tout $A > 0$, il existe x_0 tel que si $x > x_0$ alors $f(x) > A$.
Mathématiquement : $\forall A > 0, \exists x_0 / x > x_0 \Rightarrow f(x) > A$





Définition

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que tout intervalle $[-\infty; A[$ contient $f(x)$ pour x tendant vers $-\infty$.
Traduction : $\forall A < 0, \exists x_0, x < x_0 \Rightarrow f(x) < A$

Exercice : écrire ce que signifie : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Asymptote oblique :



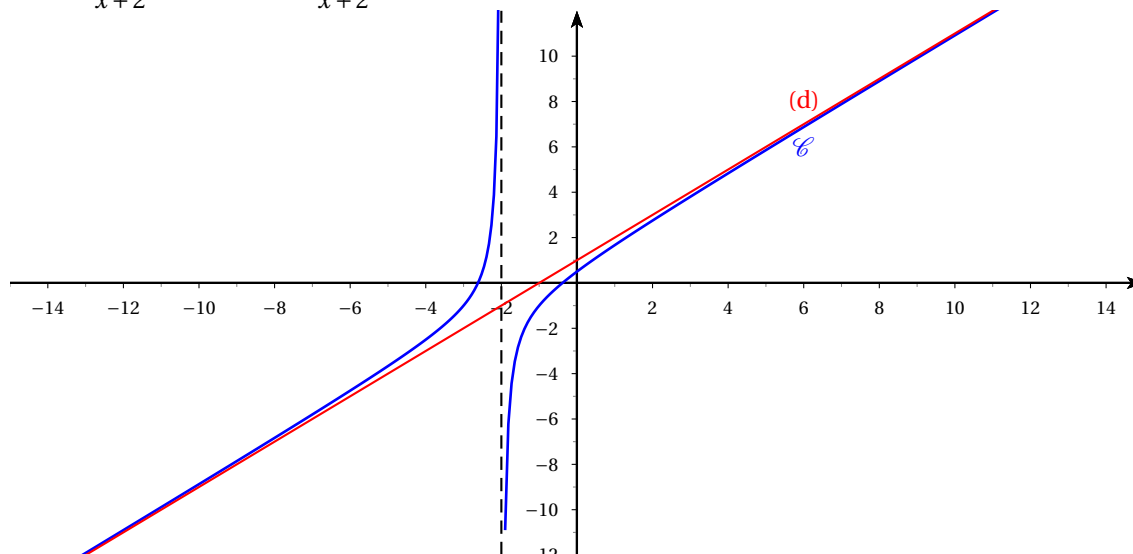
Définition

Une droite (d) d'équation $y = ax + b$ est asymptote (oblique) à la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.
Définition identique en $-\infty$.

Exemple : $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2}$, avec comme droite (d) d'équation : $y = x + 1$.

Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

Justification : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) - (x + 1) = \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 2} - (x + 1) = \frac{x^2 + 3x + 1 - (x + 2)(x + 1)}{x + 2} = \frac{x^2 + 3x + 1 - [(x + 2)(x + 1)]}{x + 2} = \frac{x^2 + 3x + 1 - x^2 - x - 2x - 2}{x + 2} = -\frac{1}{x + 2}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$.



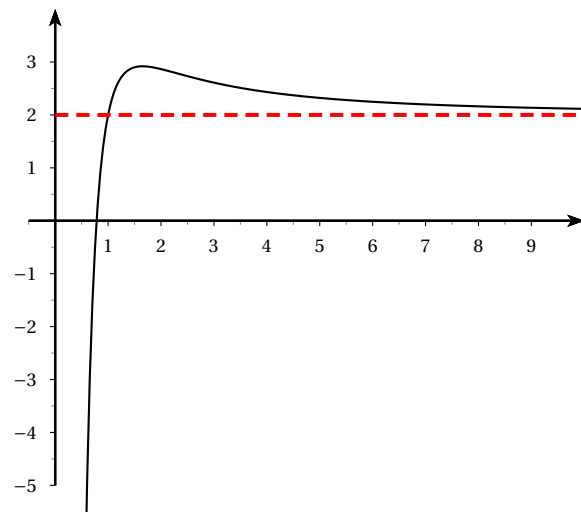
Remarque : on a vu que $f(x) - (x + 1) = -\frac{1}{x + 2}$ qui est positif pour $x < -2$ et négatif pour $x > -2$, donc la courbe est au-dessus de son asymptote pour $x < -2$ et en dessous pour $x > -2$, ce qu'on voit sur la courbe.

3 Limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$:



Définition :

Soit ℓ un réel. f a pour limite ℓ en $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert centré sur ℓ $]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est alors asymptote à $\mathcal{C}_f$.
Traduction mathématique : $\forall \alpha > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) \in]\ell - \alpha; \ell + \alpha[$



Exemples : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-a} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x-a)^p} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$

4 Limite infinie en un réel

Définitions



Définition

Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a si f n'est pas définie en a (a est donc une valeur interdite) et si $f(x)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut pour x suffisamment proche de a .

Pour tout $A > 0$, $f(x) \in]A; +\infty[$ pour x proche de a .

Plus précisément : $\forall A > 0, \exists \varepsilon > 0, x \in]a - \varepsilon; a + \varepsilon[\Rightarrow f(x) > A$

Interprétation géométrique : on a alors une asymptote « verticale », droite parallèle à l'axe des ordonnées. C'est le cas de l'exemple précédent : la droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe.

5 Limite finie en un réel :



Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

$f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a si $f(x)$ peut être aussi proche que l'on veut de ℓ pour x suffisamment proche de a .

$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, x \in]a - \alpha; a + \alpha[\Rightarrow f(x) \in]\ell - \varepsilon; \ell + \varepsilon[$.

Exemples :

Exemple 1 : la fonction $x \mapsto x^2$ en $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$$

Exemple 2 : soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

Sur $] -\infty; 0[$, $f(x) = -1$ et sur $]0; +\infty[$, $f(x) = 1$.

f n'a donc pas de limite en 0 (mais admet une limite à gauche et une limite à droite).

Exemple 3 : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (bien que 0 soit une valeur interdite). Cela permet éventuellement de prolonger des fonctions non définies en un point. (voir chapitre ultérieur sur la continuité)

6 Opérations et limites

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de a , a étant, soit un réel x_0 , soit $-\infty$, soit $+\infty$.

Addition ou soustraction

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $g(x)$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f(x) + g(x)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Produit

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
Si $g(x)$ a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f(x) \times g(x)$ a pour limite	$\ell \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

Quotient

Soient ℓ et ℓ' deux réels. Alors :

Si $f(x)$ a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $g(x)$ a pour limite	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0 (avec signe constant)	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	0	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$ (si la limite existe)	Forme indéterminée	Forme indéterminée



Définition

On dit que l'on a une forme indéterminée lorsque la limite n'est pas calculable directement ; il faut alors « travailler » davantage pour savoir si la fonction a une limite ou pas.

Remarque : Les quatre **formes indéterminées** sont : « $\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Cela signifie qu'on ne peut pas calculer la limite éventuelle directement à l'aide d'un théorème ; il faut étudier cette limite de façon plus approfondie. Nous allons voir comment dans certains cas.

7 Limite d'un polynôme en $\pm\infty$:

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2)$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$; par soustraction on a une forme indéterminée du type « $+\infty - \infty$ » donc on ne peut pas répondre directement.

Astuce : $x^3 - 2x^2 = x^3 \left(1 - \frac{2}{x}\right)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right) = 1$ donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 2x^2) = +\infty}$.



Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'un polynôme en mettant en facteur le terme de plus haut degré.

Exemple : calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x)$.

On est bien en présence d'une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Pour $x \neq 0$, $x^2 - x = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Par produit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty$

Conseil : vérifier en traçant les courbes correspondant aux expressions à la calculatrice.

8 Limite d'une fraction rationnelle en $\pm\infty$:

Rappel : une fraction rationnelle est le quotient de deux polynômes.



Propriété

En cas de forme indéterminée, on calcule la limite à l'infini d'une fraction rationnelle en factorisant au numérateur et au dénominateur les termes de plus haut degré.

Exemple :

Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 5}\right)$.

Le numérateur et le dénominateur tendent tous deux vers $+\infty$ donc on a une forme indéterminée.

Pour $x \neq 0$, $\left(\frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 5}\right) = \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x}\right)}{x^4 \left(1 + \frac{5}{x^4}\right)} = \frac{2 + \frac{3}{x}}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^4}\right)}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x}\right) = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{5}{x^4}\right) = 1.$$

Par produit et quotient, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3x}{x^4 + 5}\right) = 0$

9 Limite et ordre :

On retrouve le même énoncé que pour les suites. Dans ce qui suit, f et g sont deux fonction définies sur le même domaine I et x_0 peut désigner un réel de I , une extrémité de I , $+\infty$ ou $-\infty$.



Propriété

On suppose que f et g ont pour limite ℓ et ℓ' et que sur I , $f \leq g$ (resp $f \geq g$)

Alors

$$\ell \leq \ell' \text{ (resp } \ell \geq \ell')$$

Commentaire :

- Autrement dit, on passe à la limite dans l'inégalité $f \leq g$.
- Dans le théorème, on peut avoir $f < g$ (inégalité stricte) mais dans la conclusion, l'inégalité reste large : $\ell \leq \ell'$.
- En conséquence, si f est une fonction convergente et majorée (respectivement minorée) par un réel M , alors sa limite est majorée (respectivement minorée) par ce réel M .

10 Limite par croissances comparées de la fonction e^x et x^n où $n \in \mathbb{N}^*$ en $+\infty$:



Propriété

On montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Lorsqu'on utilise ce résultat, on invoque la croissance comparée de la fonction e^x et la fonction (x^n) en $+\infty$.

Exercice : preuve du résultat précédent avec $n = 1$:

1. Dresser le tableau de variations de la fonction $x \in [0 ; +\infty[\mapsto e^x - \frac{1}{2}x^2$.
2. En déduire que $\forall x \geq 0, e^x \geq \frac{1}{2}x^2$.
3. Calculer alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

Exemple :

Calculer les limites suivantes :

- $f(x) = x^n e^{-x}$ en $+\infty$.
- $f(x) = x^n - e^x$ en $+\infty$.
- $f(x) = x^n e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.